Note om anvendelse af cykel-index til at tælle farvninger.

Leif K. Jørgensen

Lad X være en mængde med n elementer. På hvor mange måder kan man farve elementerne i X med k farver. Svaret er k^n. Men hvis X er en mængde med visse symmetrier så vil vi opfatte en del af disse farvninger som værende "ens". Altså hvis en symmetri g af X afbilder en farvning f_1 over i farvningen f_2 så vil vi ikke skelne mellem f_1 og f_2. De regnes altså for at være "samme" farvning. I det tilfælde skal vi bruge gruppeteori for tælle forskellige farvninger.

1 Teori

Antag at en endelig gruppe G virker på en endelig mængde X og lad C være en mængde af k farver. En farvning er da en funktion $f : X \mapsto C$. Lad S være mængden af mulige farvninger.

G virker på S ved $(g \cdot f)(t) = f(g(t))$.

Vi kan ikke se forskel på to farvninger f_1 og f_2 hvis der findes $g \in G$ så $g \cdot f_1 = f_2$. Lad os sige at f_1 og f_2 da er ækvivalente. (Dette giver en ækvivalensrelation.)

Antallet af ikke-ækvivalente farvninger (eller ækvivalensklasser af farvninger) er da lig med antal baner under G's virkning på S, som bestemmes ved hjælp af Burnsides lemma. Vi skal derfor bestemme antallet $|S^g|$ af farvninger som g afbilder i sig selv, for ethvert $g \in G$.

Lad $g \in G$. Idet vi opfatter g som permutation af X kan g skrives som produkt af disjunkte cykler $g = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_r$, hvor cykler af længde 1 er medtaget, altså ethvert element i X er i én af cyklerne. Hvis $g \cdot f = f$ hvor $g \in G, f \in S$, så tildeler f samme farve til hvert element i en cykel σ_i. Antal farvninger f hvor $g \cdot f = f$ (altså $f \in S^g$) er k^r, idet hver af de r cykler uafhængigt af hinanden kan tildeles en af de k farver (hvor r afhænger af g).

Burnsides lemma

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S^g|,$$

giver altså

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{\text{antal cykler af } g \text{ som permutation af } X}.$$

Vi vil nu omskrive denne formel ved hjælp af cykel-index.

En permutation $g \in S_n$ siges at være af cykel-type $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r$ hvis g er produkt af disjunkte cykler af længde hhv. $i_1, i_2, \ldots, i_r$, hvor $i_1 + \ldots + i_r = n$; cykler af længde 1 inkluderes altså. (Dette er Lauritzens definition. Bemærk at Biggs bruger en anden notation.)

Definition 1 *(se også Biggs)*
Cykel indexet af en permutation g af cykel-type $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r$ defineres som

$$\zeta_g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r},$$

hvor $x_1, \ldots, x_n$ er forskellige symboler (variable).

Vi ser at

$$k^{\text{antal cykler af } g \text{ som permutation af } X} = k^r = \zeta_g(k, \ldots, k).$$

Antal farvninger er altså

$$|S/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_g(k, \ldots, k).$$

Definition 2 *(se også Biggs)*
Cykel indexet af en undergruppe G af S_n defineres som

$$\zeta_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta_g(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Fra ovenstående får vi:

Theorem 3 *Lad en endelig gruppe G virke på en endelig mængde X.*
Så er antallet af ikke-ækvivalente farvninger af elementerne i X med k farver:

$$\zeta_G(k, \ldots, k).$$

2 Eksempel

Ny besvarelse af en opgave fra kursusgang 19:

Hjørnerne i et tetraeder numereres $1, 2, 3, 4$. Rotationsgruppen af tetraederet oplyses at være A_4.

Gruppen A_4 har otte elementer af cykel-type $1 \leq 3$, tre elementer af cykel-type $2 \leq 2$ og ét element af cykel-type $1 \leq 1 \leq 1 \leq 1$. Derfor er

$$\zeta_{A_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{12}(8x_1x_3 + 3x_2^2 + x_1^4).$$

Antal ikke-ækvivalente farvninger af hjørnerne af tetraederet med k farver er altså

$$\zeta_{A_4}(k, k, k, k) = \frac{1}{12}(8kk + 3k^2 + k^4) = \frac{1}{12}(11k^2 + k^4).$$