Lineær algebra

1. kursusgang

Eksempel, anvendelse

To kendte punkter A og B på en linie,
to ukendte punkter x_1 og x_2.

Observationer af afstande:
fra A til x_1: b_1
fra x_1 til x_2: b_2
fra x_2 til B: b_3

Tre lineære ligninger til bestemmelse af de to ubekendte x_1 og x_2.

$$x_1 - A = b_1$$

$$x_2 - x_1 = b_2$$

$$B - x_2 = b_3.$$

Der er (formentlig) ingen eksakt løsning. Bestem mindste kvadraters løsning.

Hvis punkterne ligger i planen fås ligninger af typen

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}=b.$$

Fra Calculus: $f(x,y) = \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$ har en lineær approximation.

Eksempel, teori

Lineært ligningssystem med $m = 3$ ligninger og $n = 4$ ubekendte:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_3 + \ x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= \ 0 \\ x_1 + \ x_2 + 2x_3 + \ x_4 &= \ 4 \end{aligned}$$

Udvidet koefficientmatrix (totalmatrix) for ligningssystemet:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

som er en $m \times (n+1)$ matrix: m $(= 3)$ rækker, $n+1$ $(= 5)$ søjler.

Ligningssystemet på matrix form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

($m \times n$ matrix) $\cdot$ (vektor med n komponenter) = (vektor med m komponenter).

Antal løsninger til m lineære ligninger med n ubekendte

0 (inkonsistent ligningssystem)

∞ (der er en eller flere frie variable)

1 ($m \geq n$).

A en $m \times n$ matrix.
B en $r \times s$ matrix.

Matrixproduktet AB kan udregnes hvis $n = r$
og resultatet er så en $m \times s$ matrix.

Tallene i produktet AB kan udregnes som prikprodukter:
Plads (i, j) i AB = (A's række i) $\cdot$ (B's søjle j).

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Identitetsmatrix / Enhedsmatrix:

$$I = I_n = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\mathbf{x}$ er vektor med n komponenter så er $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
Hvis A er en $m \times n$ matrix så er $AI_n = A$ og $I_m A = A$.

En **invers matrix** til en matrix A er en matrix A^{-1} som opfylder

$$AA^{-1} = I \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I.$$

Hvis en $m \times n$ matrix har en invers så er $m = n$ og $I = I_n$.

<u>$n = 2$</u>

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Hvis $ad - bc = 0$ så har A ikke en invers.
Hvis $ad - bc \neq 0$ så har A invers

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

<u>Vilkårligt n</u>

Hvis $[A \;\; I] \xrightarrow{\texttt{rref}} [I \;\; B]$ så er $A^{-1} = B$.

Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix så har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en entydig løsning:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Hvis A og B er invertible matricer så er

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Transponering af $m \times n$ matrix A:

A^T er $n \times m$ matrix, f.eks.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$(1,2,3,4)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Afstand mellem to punkter (vektorer): (a_1, a_2) og (b_1, b_2) i planen:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Afstand mellem to vektorer

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Afsnit 6.4 i SIF

(gennemgås senere):

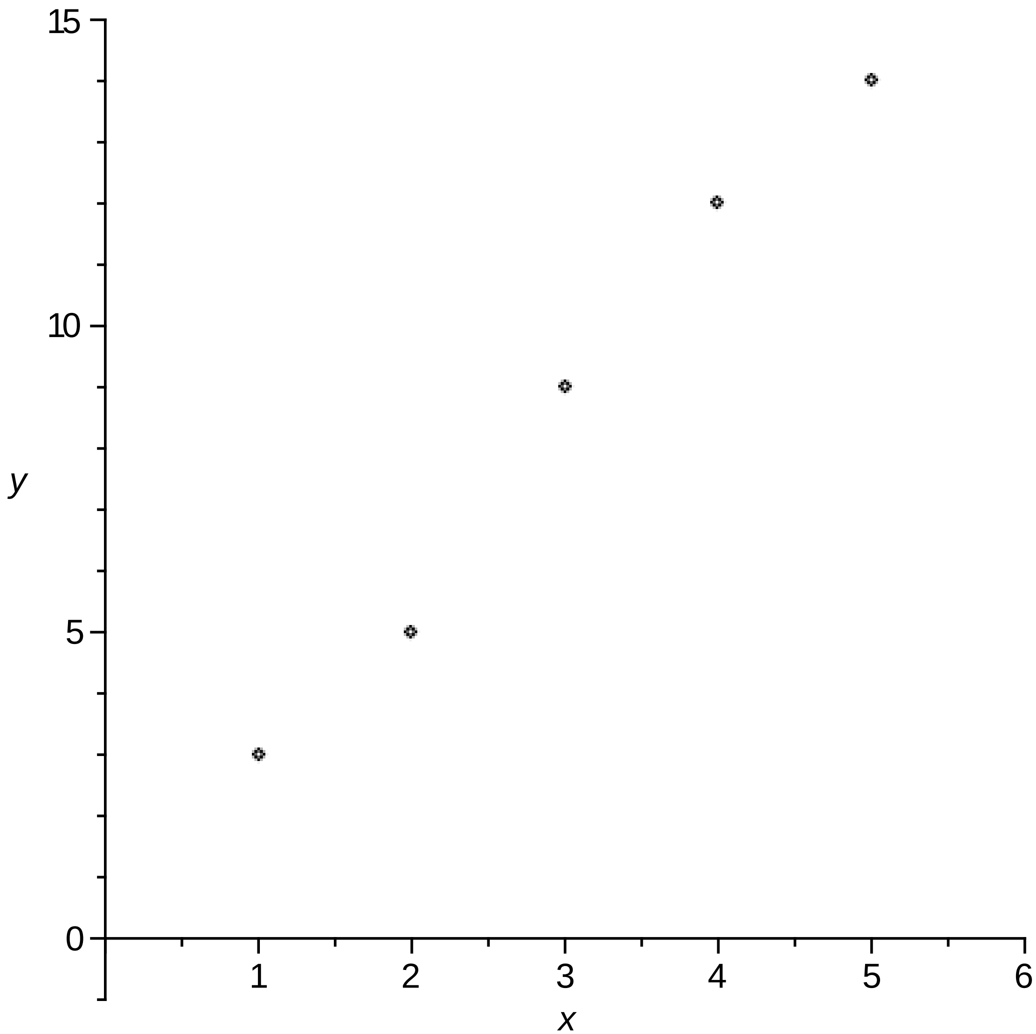
- A : en $m \times n$ matrix, $m > n$

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er inkonsistent.

Find $\mathbf{x}$ så $A\mathbf{x}$ er tæt på $\mathbf{b}$.

Første del af afsnit 6.4

Find linie der passer bedst gennem et antal punkter i et koordinatsystem.


15
10
5
0
y
1
2
3
4
5
6
x

Vi har n punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Find en linie $y = ax + b$ der tilnærmer de n punkter bedst muligt.

(I bogen: $y = a_0 + a_1 x$.)

Antagelse:

- x_i-værdier kendes præcist
- men der kan være fejl på y_i-værdierne.

Hvornår går linien $ax + b = y$ præcist gennem alle n punkter.

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \\ &\vdots \\ ax_n + b &= y_n \end{aligned}$$

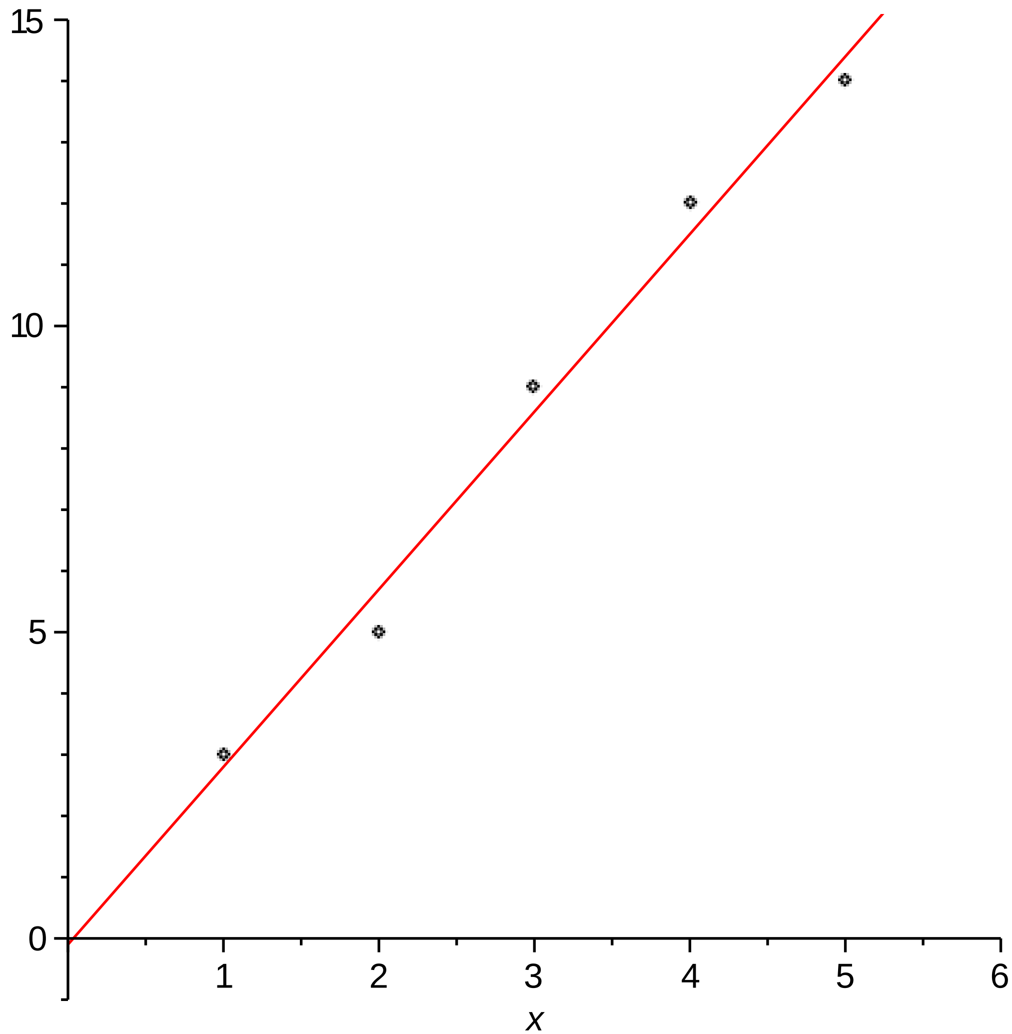
Et system af n lineære ligninger

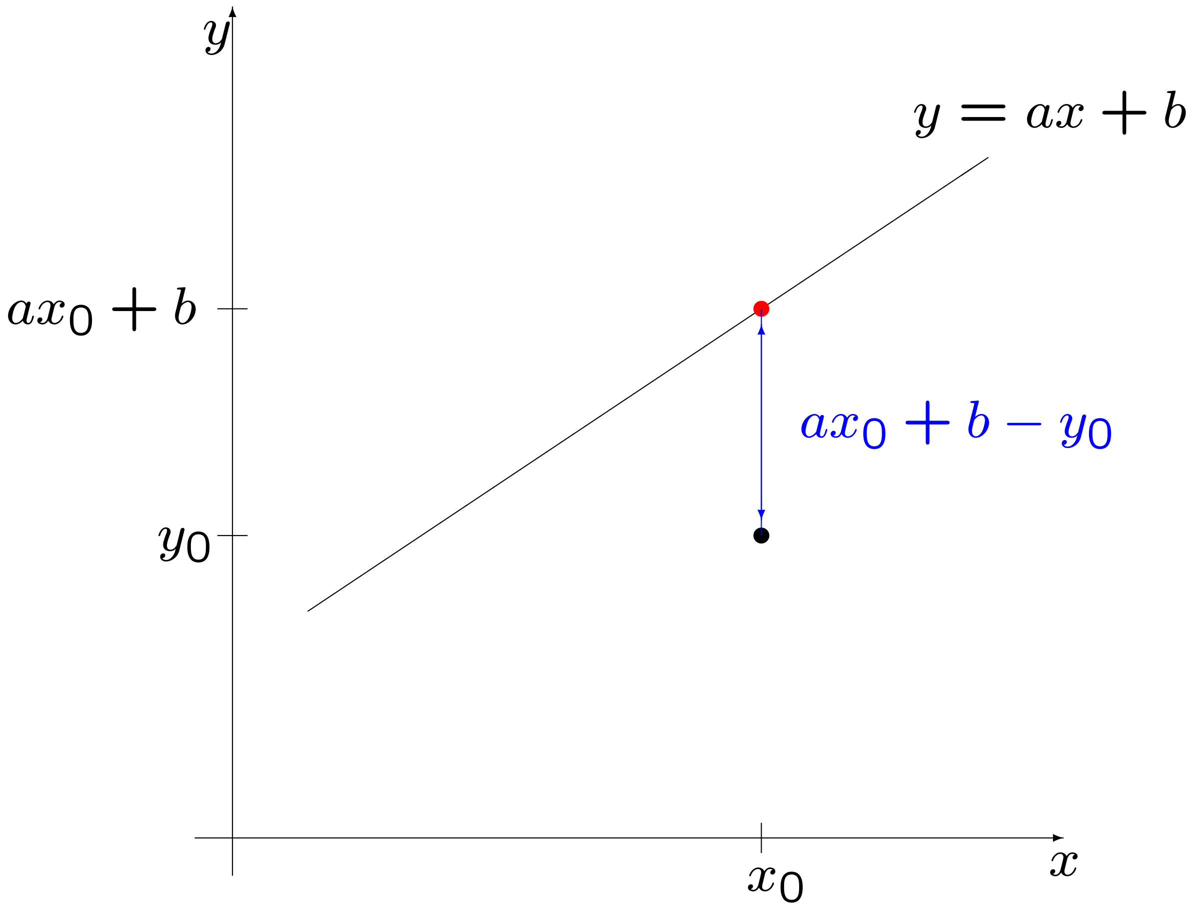
med 2 ubekendte (a og b). På matrixform

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$


15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
x



y
$y = ax + b$
$ax_0 + b$
$ax_0 + b - y_0$
y_0
x_0
x

Mindste kvadraters metode:

Bestem linien $y = ax + b$ sådan at

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$$

er mindst mulig.

Det betyder at afstanden mellem

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + b \\ ax_2 + b \\ \vdots \\ ax_n + b \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

er mindst mulig.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Hvis

$$A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

så er

$$A^T A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}.$$

$$A^T A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}.$$

Vi vil senere se at en løsning til denne ligning, som kaldes normalligning giver mindste kvadraters linien.

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}.$$

Eksempel.
Bestem den linie (mindste kvadraters linien) der bedst tilnærmer følgende punkter: $(1,3)$, $(2,5)$, $(3,9)$, $(4,12)$, $(5,14)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 158 \end{bmatrix}$$

Normalligning

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 158 \end{bmatrix}$$

Løsning:

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 2.9 \end{bmatrix}$$

Den ønskede linie har altså ligning

$$y = 2.9x - 0.1$$

Eksempel: Punkter $(1,0)$, $(2,1)$, $(4,3)$.

Find parabel med ligning $c+xb+x^2a=y$ der går gennem punkterne:

$$
\begin{aligned}
c+1b+1^2a&=0\\
c+2b+2^2a&=1\\
c+4b+4^2a&=3
\end{aligned}
$$

Løs ligningerne m.h.t. c, b, a.

Afsnit 6.1

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Så defineres **prikproduktet** (det indre produkt eller skalarproduktet) som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Regneregler:

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

- $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ for et tal c.

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0$ med mindre $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\quad \mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = 0$.

Længden af en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ defineres til

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

$$||\mathbf{v}||^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

$$||c\mathbf{v}|| = \sqrt{(c\mathbf{v})\cdot(c\mathbf{v})} = \sqrt{c^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})} = |c|\sqrt{||\mathbf{v}||^2} = |c| \cdot ||\mathbf{v}||.$$

Normalisering af vektor $\mathbf{v}$:
Vektoren $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ har længde 1 og peger i samme retning som $\mathbf{v}$.

Afstanden mellem to vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres som

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}.$$

To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ siges at være ortogonale (vinkelrette) hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

$\mathbf{0}$ er ortogonal på enhver vektor $\mathbf{v}$.

Pythagoras:
$\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale hvis kun hvis $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$.

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Underrum (afsnit 4.1)
H: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.
H er et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis

- $\mathbf{0} \in H$
- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $\mathbf{v} \in H$ så $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$
- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$ så $c\mathbf{u} \in H$

Lad W være et underrum af $\mathbb{R}^n$,
og lad $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ være vektorer i W.

$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ er en basis for W hvis

- span$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\} = W$ og

- $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ er lineært uafhængige
  (Det betyder at ligningen

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_p\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$$

  kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$.)

Dimensionen, dim W, er antallet af vektorer i en basis.

Eksempler på underrum:

1. Hvis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$ så er

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\} = \{c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_m\mathbf{u}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

(mængden af alle linearkombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$).
span$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

2. Hvis $A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_m]$ er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Col } A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$$

(søjlerummet af A)
et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Col A er mængden af vektorer på formen $A\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

3. Hvis A er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Nul } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

(nulrummet for A) et underrum af $\mathbb{R}^m$.

4. Hvis $A = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{a}_2 & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \mathbf{a}_m & \dots \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m]^T$ er en $m \times n$ matrix så er

Row A = Col A^T et underrum af $\mathbb{R}^n$.

(Row A er mængden af alle linear kombinationer af A's rækkevektorer.)

Det kaldes rækkerummet for A.

5. Hvis W er et underrum af $\mathbb{R}^n$ så lad L være mængden af vektorer i $\mathbb{R}^n$ der er ortogonale på enhver vektor i W.

Så er L et underrum af $\mathbb{R}^n$.
L kaldes det ortogonale komplement af W, skrives $L = W^\perp$.

For et underrum W af $\mathbb{R}^n$:

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

$$\text{dim } W + \text{dim } W^\perp = n$$

De fire fundamentale underrum for matricen A er Col A, Row A, Nul A og Nul A^T.

Sammenhæng mellem de fire fundamentale underrum:

$$(\text{Row } A)^{\perp} = \text{Nul } A$$

$$(\text{Col } A)^{\perp} = (\text{Row } A^T)^{\perp} = \text{Nul } A^T$$