# Lineær algebra
# Lektion 1

Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$m \times n$ matrix: $m$ $(= 3)$ rækker, $n$ $(= 5)$ søjler.

$A$ er udvidet koefficientmatrix (totalmatrix) for et lineært ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Ligningssystemet på matrix form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

($m \times n$ matrix) $\cdot$ (vektor med $n$ komponenter) = (vektor med $m$ komponenter).

Antal løsninger til $m$ lineære ligninger med $n$ ubekendte

0 (inkonsistent ligningssystem)

$\infty$ (der er en eller flere frie variable)

1 ($m \geq n$).

Løsning af ligningssystem ...

$A$ en $m \times n$ matrix.
$B$ en $r \times s$ matrix.

Produktet $AB$ kan udregnes hvis $n = r$
og resultatet er så en $m \times s$ matrix.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Identitetsmatrix / Enhedsmatrix:

$$I = I_n = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\mathbf{x}$ er vektor med $n$ komponenter så er $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
Hvis $A$ er en $m \times n$ matrix så er $AI_n = A$ og $I_mA = A$.

En invers matrix til en matrix $A$ er en matrix $A^{-1}$ som opfylder

$$AA^{-1} = I \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I.$$

*Hvis* en $m \times n$ matrix har en invers så er $m = n$ og $I = I_n$.

$\underline{n = 2}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Hvis $ad - bc = 0$ så har $A$ ikke en invers.
Hvis $ad - bc \neq 0$ så har $A$ invers

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

<u>Vilkårligt $n$</u>

Hvis $[A \;\; I] \sim [I \;\; B]$ så er $A^{-1} = B$.

Hvis $A$ er en invertibel $n \times n$ matrix så har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en entydig løsning:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Hvis $A$ og $B$ er invertible matricer så er

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Transponering af $m \times n$ matrix $A$:

$A^T$ er $n \times m$ matrix, f.eks.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$(1,2,3,4)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Afstand mellem to punkter (vektorer): $(a_1, a_2)$ og $(b_1, b_2)$ i planen:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Afstand mellem to vektorer

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

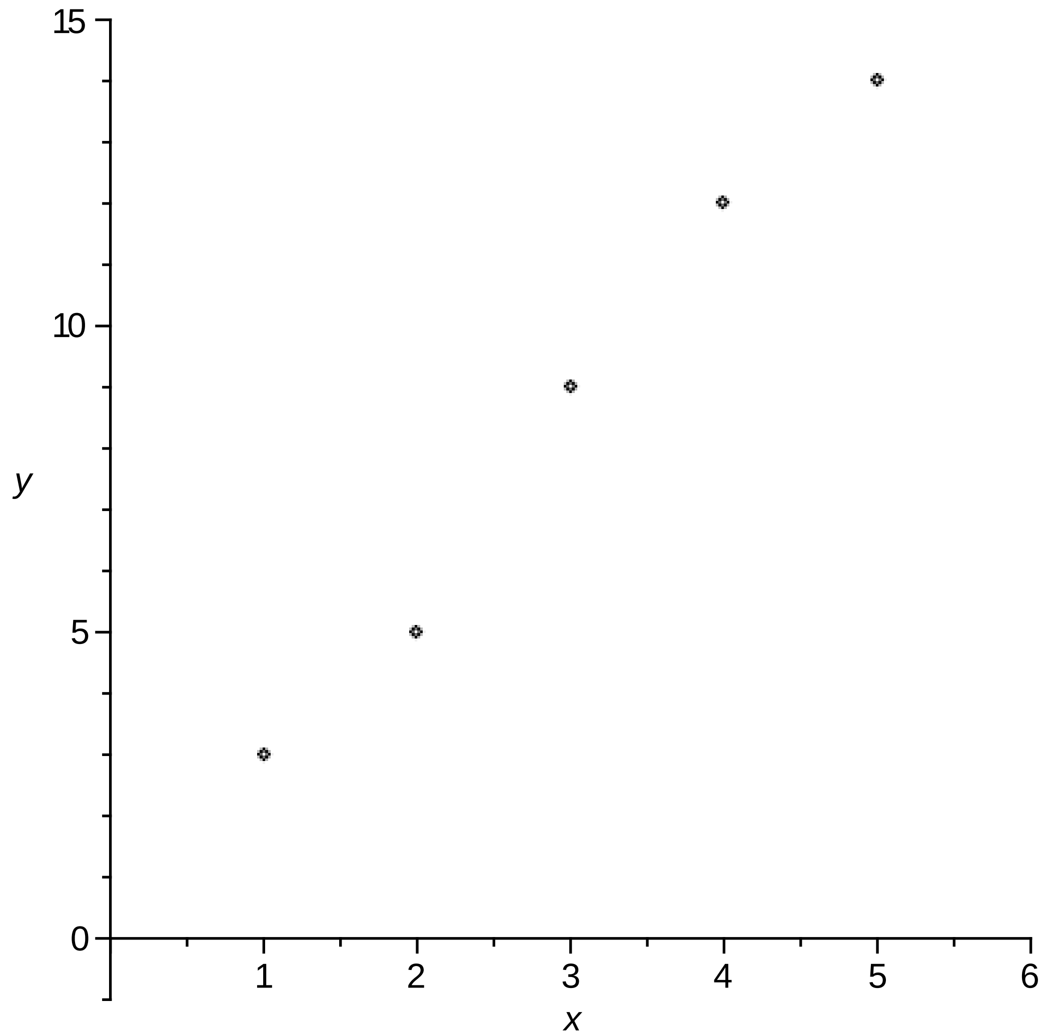
**Kapitel 6**

Afsnit 6.5 (gennemgås senere):

- $A$ : en $m \times n$ matrix, $m > n$
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er inkonsistent.

Find $\mathbf{x}$ så $A\mathbf{x}$ er tæt på $\mathbf{b}$.

# Afsnit 6.6


15
10
5
0
y
1
2
3
4
5
6
x

Vi har $n$ punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Find en linie $y = ax + b$ der tilnærmer de $n$ punkter bedst muligt.
(I bogen: $y = \beta_0 + \beta_1 x$.)

Antagelse:

- $x_i$-værdier kendes præcist
- men der kan være fejl på $y_i$-værdierne.

Hvornår går linien $y = ax + b$ præcist gennem alle $n$ punkter.

$$
\begin{aligned}
ax_1 + b &= y_1 \\
ax_2 + b &= y_2 \\
&\vdots \\
ax_n + b &= y_n
\end{aligned}
$$

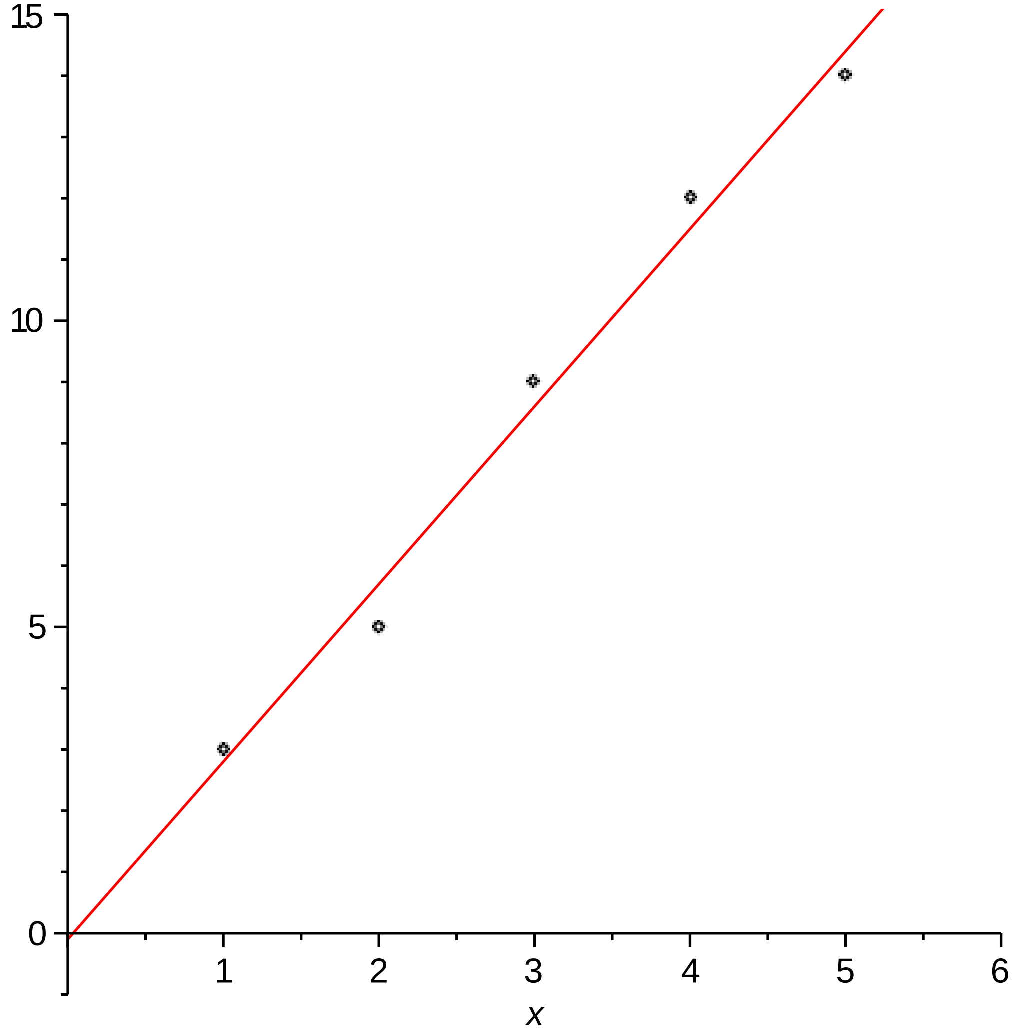
Et system af $n$ lineære ligninger

med 2 ubekendte ($a$ og $b$). På matrixform

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
x

**Mindste kvadraters metode:**

Bestem linien $y = ax + b$ sådan at

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$$

er mindst mulig.

Det betyder at afstanden mellem

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

er mindst mulig.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Hvis

$$A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

så er

$$A^T A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}.$$

(Afsnit 6.5: løsning til denne ligning giver mindste kvadrater linien.)

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}.$$

**Eksempel.**
Punkter $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 9)$, $(4, 12)$, $(5, 14)$.

Vi fandt $a$ og $b$ så kurven $y = af(x) + bg(x)$ ligger tættest på punkterne, hvor $f(x) = x$ og $g(x) = 1$.

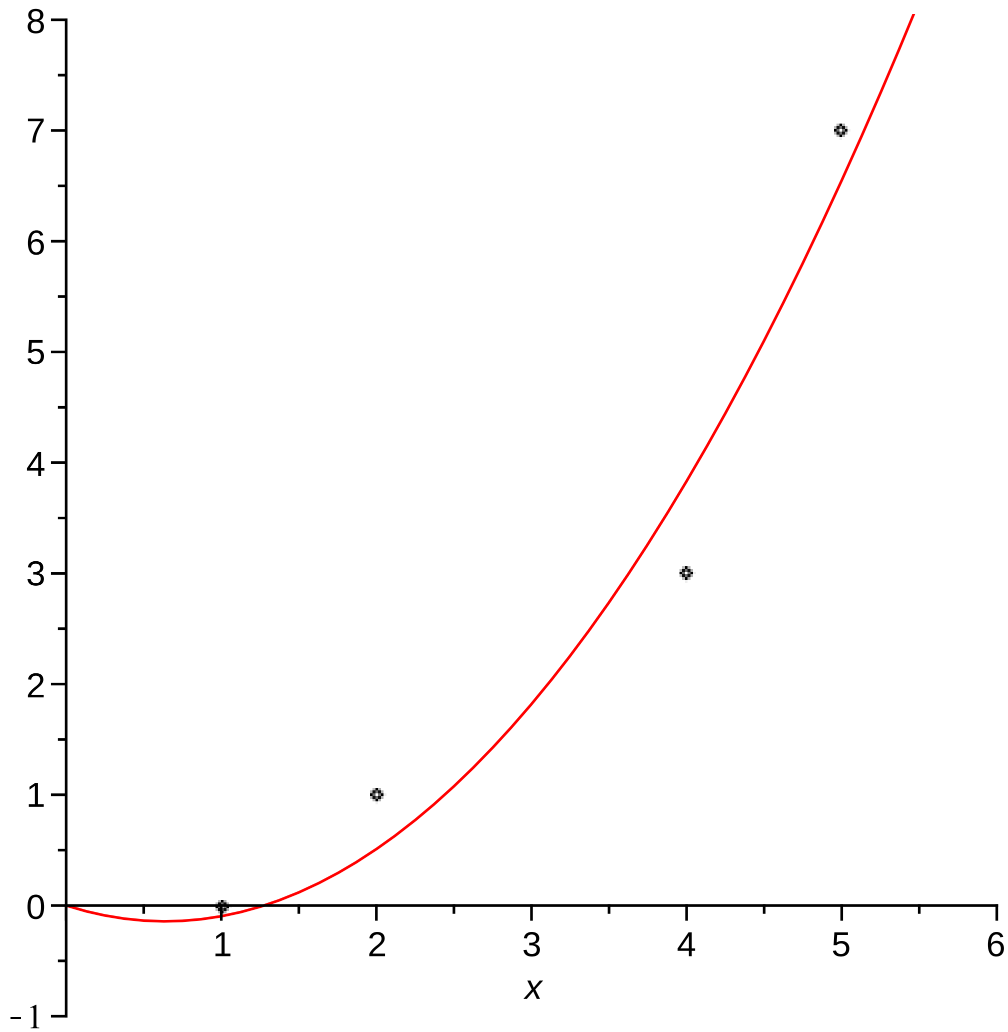
Metoden kan bruges for andre funktioner $f(x)$ og $g(x)$.

F.eks. $f(x) = x^2$ og $g(x) = x$.

Eksempel: Punkter $(1,0)$, $(2,1)$, $(4,3),(5,7)$.

Find parabel med ligning $y = bx + ax^2$ der går gennem punkterne: $(xb + x^2a = y)$

$$\begin{aligned}1b + 1^2a &= 0\\ 2b + 2^2a &= 1\\ 4b + 4^2a &= 3\\ 5b + 5^2a &= 7\end{aligned}$$



8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
1
2
3
4
5
6
x