

Lineær algebra
1. kursusgang

Et **lineært ligningssystem** bestående af $m = 3$ ligninger med $n = 4$ ubekendte:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4\end{aligned}$$

Dette ligningssystem har **udvidet koefficientmatrix** (totalmatrix):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

som er en $m \times (n + 1)$ matrix: $m (= 3)$ rækker, $n + 1 (= 5)$ søjler.

Ligningssystemet på matrix form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$(m \times n \text{ matrix}) \cdot (\text{vektor med } n \text{ komponenter}) = (\text{vektor med } m \text{ komponenter}).$

Antal løsninger til m lineære ligninger med n ubekendte

0 (inkonsistent ligningssystem)

∞ (der er en eller flere frie variable)

1 ($m \geq n$).

A en $m \times n$ matrix.

B en $r \times s$ matrix.

Matrixproduktet AB kan udregnes hvis $n = r$ og resultatet er så en $m \times s$ matrix.

Tallene i produktet AB kan udregnes som prikprodukter:
Plads (i, j) i $AB = (A$'s række $i) \cdot (B$'s søjle $j)$.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$$

Identitetsmatrix / Enhedsmatrix:

$$I = I_n = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvis \mathbf{x} er vektor med n komponenter så er $I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Hvis A er en $m \times n$ matrix så er $AI_n = A$ og $I_m A = A$.

En **invers matrix** til en matrix A er en matrix A^{-1} som opfylder

$$AA^{-1} = I \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I.$$

Hvis en $m \times n$ matrix har en invers så er $m = n$ og $I = I_n$.

$n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Hvis $ad - bc = 0$ så har A ikke en invers.

Hvis $ad - bc \neq 0$ så har A invers

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Vilkårligt n

Hvis $[A \ I] \sim [I \ B]$ så er $A^{-1} = B$.

Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix så har ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en entydig løsning:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Hvis A og B er invertible matricer så er

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Transponering af $m \times n$ matrix A :

A^T er $n \times m$ matrix, f.eks.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$(1, 2, 3, 4)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Afstand mellem to punkter (vektorer): (a_1, a_2) og (b_1, b_2) i planen:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Afstand mellem to vektorer

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

i \mathbb{R}^n :

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Afsnit 6.4 i SIF

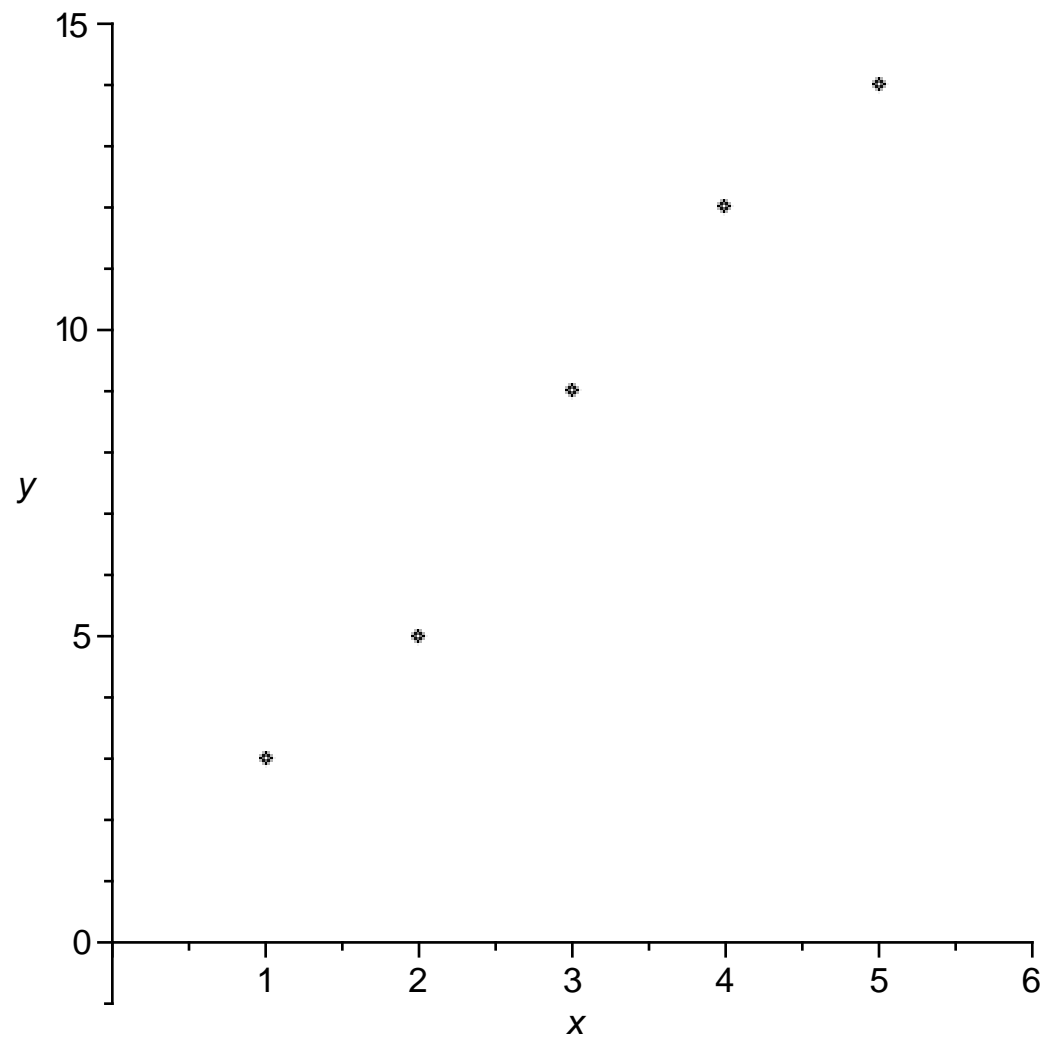
(gennemgås senere):

- A : en $m \times n$ matrix, $m > n$
- $Ax = b$ er inkonsistent.

Find x så Ax er tæt på b .

Første del af afsnit 6.4

Find linie der passer bedst gennem et antal punkter i et koordinatsystem.



Vi har n punkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Find en linie $y = ax + b$ der tilnærmer de n punkter bedst muligt.

(I bogen: $y = a_0 + a_1x$.)

Antagelse:

- x_i -værdier kendes præcist
- men der kan være fejl på y_i -værdierne.

Hvornår går linien $y = ax + b$ præcist gennem alle n punkter.

$$ax_1 + b = y_1$$

$$ax_2 + b = y_2$$

$$\vdots$$

$$ax_n + b = y_n$$

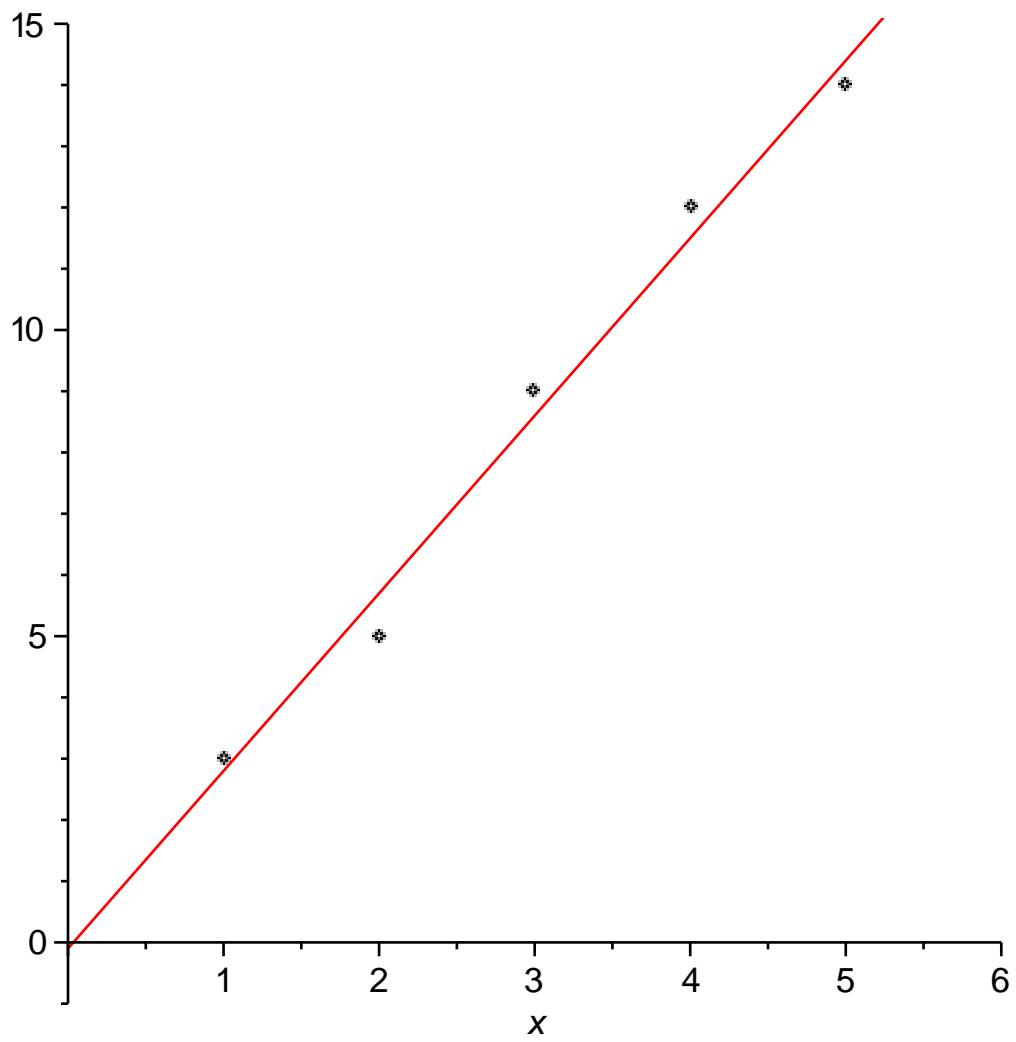
Et system af n lineære ligninger

med 2 ubekendte (a og b). På matrixform

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



Mindste kvadraters metode:

Bestem linien $y = ax + b$ sådan at

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$$

er mindst mulig.

Det betyder at afstanden mellem

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + b \\ ax_2 + b \\ \vdots \\ ax_n + b \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

er mindst mulig.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Hvis

$$A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

så er

$$A^T A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}.$$

$$A^T A \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = A^T \mathbf{y}.$$

Vi vil senere se at en løsning til denne ligning, som kaldes **normalligning** giver mindste kvadraters linien.

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}.$$

Eksempel.

Bestem den linie (mindste kvadraters linien) der bedst tilnærmer følgende punkter: $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 9)$, $(4, 12)$, $(5, 14)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 158 \end{bmatrix}$$

Normalligning

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 158 \end{bmatrix}$$

Løsning:

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 2.9 \end{bmatrix}$$

Den ønskede linie har altså ligning

$$y = 2.9x - 0.1$$

Afsnit 6.1

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være to vektorer i \mathbb{R}^n .

Så defineres **prikproduktet** (det indre produkt eller skalarproduktet) som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Regneregler:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ for et tal c .
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$ med mindre $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Længden af en vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ defineres til

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\|c\mathbf{v}\| = \sqrt{(c\mathbf{v}) \cdot (c\mathbf{v})} = \sqrt{c^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} = |c| \sqrt{\|\mathbf{v}\|^2} = |c| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Normalisering af vektor \mathbf{v} :

Vektoren $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$ har længde 1 og peger i samme retning som \mathbf{v} .

Afstanden mellem to vektorer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i \mathbb{R}^n defineres som

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}.$$

To vektorer \mathbf{u} og \mathbf{v} siges at være ortogonale (vinkelrette) hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

$\mathbf{0}$ er ortogonal på enhver vektor \mathbf{v} .

Pythagoras:

\mathbf{u} og \mathbf{v} er ortogonale hvis kun hvis $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Underrum (afsnit 4.1)

H : en mængde af vektorer i \mathbb{R}^n .

H er et underrum af \mathbb{R}^n hvis

- $\mathbf{0} \in H$
- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $\mathbf{v} \in H$ så $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$
- hvis $\mathbf{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$ så $c\mathbf{u} \in H$

Lad W være et underrum af \mathbb{R}^n ,
og lad $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ være vektorer i W .

$\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$ er en basis for W hvis

- $\text{span}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\} = W$ og
- $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ er lineært uafhængige
(Det betyder at ligningen

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_p\mathbf{b}_p = \mathbf{0}$$

kun har løsningen $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$.)

Dimensionen, $\dim W$, er antallet af vektorer i en basis.

Eksempler på underrum:

1. Hvis $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$ så er

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} = \{c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_m\mathbf{u}_m \mid c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}\}$$

(mængden af alle linearkombination af $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$).

$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ er et underrum af \mathbb{R}^n .

2. Hvis $A = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]$ er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Col } A = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$$

(søjlerummet af A)

et underrum af \mathbb{R}^n .

$\text{Col } A$ er mængden af vektorer på formen $A\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

3. Hvis A er en $n \times m$ matrix så er

$$\text{Nul } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

(nulrummet for A) et underrum af \mathbb{R}^m .

4. Hvis $A = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{a}_2 & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \mathbf{a}_m & \dots \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m]^T$ er en $m \times n$ matrix så er

$\text{Row } A = \text{Col } A^T$ et underrum af \mathbb{R}^n .

(Row A er mængden af alle linear kombinationer af A 's rækkevektorer.)

Det kaldes rækkerummet for A .

5. Hvis W er et underrum af \mathbb{R}^n så lad L være mængden af vektorer i \mathbb{R}^n der er ortogonale på enhver vektor i W .

Så er L et underrum af \mathbb{R}^n .

L kaldes det ortogonale komplement af W , skrives $L = W^\perp$.

For et underrum W af \mathbb{R}^n :

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

$$\dim W + \dim W^\perp = n$$

De fire fundamentale underrum for matricen A er $\text{Col } A$, $\text{Row } A$, $\text{Nul } A$ og $\text{Nul } A^T$.

Sammenhæng mellem de fire fundamentale underrum:

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A$$

$$(\text{Col } A)^\perp = (\text{Row } A^T)^\perp = \text{Nul } A^T$$