Lineær algebra - 9

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. A er $m \times n$.
Nulrummet af T er mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er **enentydig (injektiv)**
- nulrummet af T er $\{\mathbf{0}\}$
- A har pivot i alle søjler

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix. A er $m \times n$.
Følgende betingelser er ækvivalente

- T har en **invers funktion**
- T er enentydig og på
- rank $A = n = m$
- A har en invers matrix.

Den inverse funktion af T er da den lineære transformation med standardmatrix A^{-1}.

Sammensat funktion

Hvis $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ og $S : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ er lineære transformationer med standardmatricer henholdsvis A og B, så er

$$S \circ T = ST : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

en lineær transformation med standardmatrix BA.

Altså

$$T_B T_A = T_{BA}.$$

3.1: **Determinanter**

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

Definition af determinant.

$n = 1$: $\quad \det[a_{11}] = a_{11}$

$n \geq 2$: $\quad \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$

(i,j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant:
$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \ldots + a_{1n}c_{1n}$.

$n = 2$: $\quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,
og hvis $ad - bc \neq 0$ så er matricen invertibel med invers

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$