Lineær algebra - 13

Basis for underrum.

Enhver mængde $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, der udspænder V har en delmængde, der er basis for V.
Delmængden består af de søjler i matricen $[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_k]$ der har pivot.

Enhver lineært uafhængig mængde $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ af vektorer i V kan udvides til en basis.
Gentag følgende indtil mængden udspænder V og dermed er basis for V:
Vælg en vektor $\mathbf{v} \in V$, som ikke er linear kombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$, og tilføj $\mathbf{v}$ til mængden.

Ethvert underrum $V \neq \{\mathbf{0}\}$ har altså en basis.

V: underrum af $\mathbb{R}^n$.
Hvis

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

er en lineært uafhængig mængde af vektorer i V og

$$\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

er en mængde af vektorer i V, der udspænder V så er $k \leq p$.

Hvis $k = p$ så er $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{S}_2$ baser for V.

Hvis både $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{S}_2$ baser for V så er $k = p$.

Antallet af vektorer i en basis for V kaldes **dimensionen** af V, skrives $\dim V$.
Vi definerer desuden $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Hvis $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en lineært uafhængig mængde af vektorer i V og $k = \dim V$ så er $\mathcal{S}$ en basis for V.

Hvis $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er en mængde af vektorer i V, der udspænder V, og $p = \dim V$ så er $\mathcal{S}$ en basis for V.

Underrum knyttet til en matrix
A: en $m \times n$ matrix.

Fra tidligere:
rank $A =$ antal søjler i A med pivot
nullity $A = n -$ rank $A =$ antal søjler uden pivot $=$ antal frie variable.

Søjler med pivot udgør en basis for søjlerummet, Col A.
Altså $\dim \text{Col } A = \text{rank } A$.

En basis for nulrummet af A bestemmes som i afsnit 1.3, med en basisvektor for hver fri variabel.
Altså $\dim \text{Null } A = \text{nullity } A$.

$$\dim \text{Null } A \; + \; \dim \text{Col } A \; = n.$$

Hvis rref$(A) = R$, så er Row $A =$ Row R.
Rækker i R med pivot (altså alle rækker forskellig fra 0) udgør en basis for Row A.

Derfor er $\dim$ Row $A =$ rank A.

Desuden er $\dim$ Row $A =$ rank A^T, da Row $A =$ Col A^T.

Altså rank $A =$ rank A^T.

Underrum knyttet til en lineær transformation

$T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ en lineær transformation med standardmatrix A, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Nulrummet af T er da det samme som nulrummet af A.

Og billedrummet (range) af T er det samme som søjlerummet af A.