

## Lineær algebra - 13

### **Basis for underrum.**

Enhver mængde  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ , der udspænder  $V$  har en delmængde, der er basis for  $V$ .

Delmængden består af de søjler i matricen  $[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_k]$  der har pivot.

Enhver lineært uafhængig mængde  $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$  af vektorer i  $V$  kan udvides til en basis.

Gentag følgende indtil mængden udspænder  $V$  og dermed er basis for  $V$ :

Vælg en vektor  $\mathbf{v} \in V$ , som ikke er linear kombination af  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ , og tilføj  $\mathbf{v}$  til mængden.

Ethvert underrum  $V \neq \{\mathbf{0}\}$  har altså en basis.

$V$ : underrum af  $\mathbb{R}^n$ .

Hvis

$$\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

er en lineært uafhængig mængde af vektorer i  $V$  og

$$\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$$

er en mængde af vektorer i  $V$ , der udspænder  $V$  så er  $k \leq p$ .

Hvis  $k = p$  så er  $\mathcal{S}_1$  og  $\mathcal{S}_2$  baser for  $V$ .

Hvis både  $\mathcal{S}_1$  og  $\mathcal{S}_2$  baser for  $V$  så er  $k = p$ .

Antallet af vektorer i en basis for  $V$  kaldes **dimensionen** af  $V$ , skrives  $\dim V$ .

Vi definerer desuden  $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ .

- Hvis  $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$  er en lineært uafhængig mængde af vektorer i  $V$  og  $k = \dim V$  så er  $\mathcal{S}$  en basis for  $V$ .
- Hvis  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  er en mængde af vektorer i  $V$ , der udspænder  $V$ , og  $p = \dim V$  så er  $\mathcal{S}$  en basis for  $V$ .

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad V = \text{Span } \mathcal{B}$$

Da  $\mathcal{B}$  er lineært uafhængig er  $\mathcal{B}$  basis

$$\dim V = 2$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Er  $S$  basis for  $V$ ?

Undersøg:

1. Har  $S$   $\dim V$  vektorer?
2. Er  $S$  lineært uafhængig?
3. Ligger vektorerne fra  $S$  i  $V$ ?

1  $S$  har  $2 = \dim V$  vektorer. OK

2. OK

$$3. \quad E \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

konsistent?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

OK

$S$  er altså basis.

## Underrum knyttet til en matrix

$A$ : en  $m \times n$  matrix.

Fra tidligere:

$\text{rank } A = \text{antal søjler i } A \text{ med pivot}$

$\text{nullity } A = n - \text{rank } A = \text{antal søjler uden pivot} = \text{antal frie variable.}$

- Søjler med pivot udgør en basis for søjlerummet,  $\text{Col } A$ .  
Altså  $\dim \text{Col } A = \text{rank } A$ .
- En basis for nulrummet af  $A$  bestemmes som i afsnit 1.3, med en basisvektor for hver fri variabel.
- Altså  $\dim \text{Null } A = \text{nullity } A$ .

$$\dim \text{Null } A + \dim \text{Col } A = n.$$

Hvis  $\text{rref}(A) = R$ , så er  $\text{Row } A = \text{Row } R$ .

Rækker i  $R$  med pivot (altså alle rækker forskellig fra 0) udgør en basis for  $\text{Row } A$ .

Derfor er  $\dim \text{Row } A = \text{rank } A$ .

Desuden er  $\dim \text{Row } A = \text{rank } A^T$ , da  $\text{Row } A = \text{Col } A^T$ .

Altså  $\text{rank } A = \text{rank } A^T$ .

EKS på underen løsande til  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A = 3, \quad \text{rank } A^T = 3$$

$$\dim \text{Col } A = 3, \quad \dim \text{Row } A = 3$$

$$\dim \text{Null } A = 5 - \text{rank } A = 2$$

↑ antal søjler i A

$$\text{Basis for Col } A : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



Basis for Row A :  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$



rekker i  $\text{ref}(A)$



## Underrum knyttet til en lineær transformation

- $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  en lineær transformation med standardmatrix  $A$ ,  
altså  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ .
- Nulrummet af  $T$  er da det samme som nulrummet af  $A$ .
- Og billedrummet (range) af  $T$  er det samme som søjlerummet af  $A$ .

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

Standard matrix

$$A = \left[ T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad T(\vec{e}_3) \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Image of  $T = \text{Col } A$

Kernel of  $T = \text{Null } A$