Lineær algebra - 14

Koordinatsystemer.

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$ så findes der for enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ entydige tal $c_1, c_2, \ldots, c_k$ så

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots c_k\mathbf{b}_k.$$

$\mathcal{B}$ udspænder V. Det betyder at $\mathbf{v}$ på mindst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

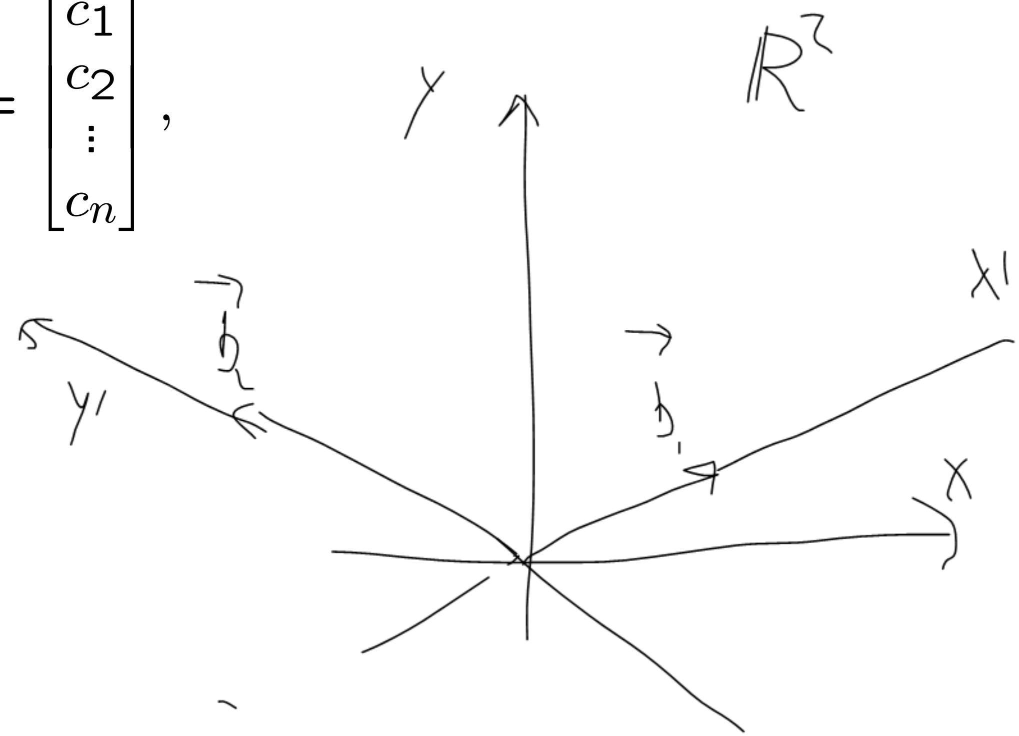
$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig. Det betyder at $\mathbf{v}$ på højst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

Koordinatvektor. (defineres kun for $V = \mathbb{R}^n$.)

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$
(hvor rækkefølgen af basisvektorerne er fastlagt)
så defineres koordinatvektoren for $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots c_n\mathbf{b}_n$.



Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, hvor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^n$
og $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_n]$ som er en $n \times n$ matrix.

Så er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis B er invertibel.

Hvis $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ så kan koordinatvektorer m.h.t. $\mathcal{B}$ bestemmes ved

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{v}.$$

<u>Eks.</u> på koordinatsystem i $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B har pivot i alle søjler $\Longrightarrow$

$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig

$\mathcal{B}$ er basis for $\mathbb{R}^3$

$\vec{v}$: en vektor i $\mathbb{R}^3$ med koordinatvektor

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så er $\vec{v} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}-7\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+1\\-1\\1\end{bmatrix}$

Kan udregnes som

$$\vec{v} = B \cdot [\vec{v}]_B$$

Find $[\vec{u}]_B$ for en kendt vektor $\vec{u}$

Brug B^{-1}

$$[B \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^{-1}}$$

Hvis $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ så er

$$[\vec{u}]_{B} = B^{-1}\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hvis $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (koordinater m.h.t. standardbasis)

Find $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{B} = B^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Hvis $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ er kendt så er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' + 2y' - 7z' \\ -y' + 2z' \\ z' \end{bmatrix}$$

Kugle i $\mathbb{R}^3$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ligning i nyt koordinatsystem:

$$(x' + 2y' - 7z')^2 + (-y' + 2z')^2 + (z')^2 = 1$$