

# Lineær algebra - 18

## Diagonalisering af matricer.

Lad  $A$  være en  $n \times n$  matrix.

$A$  siges at være diagonaliserbar hvis der findes en invertibel matrix  $P$  og en diagonalmatrix  $D$  så

$$A = PDP^{-1}.$$

$A$  er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes en basis for  $\mathbb{R}^n$ , der består af egenvektorer for  $A$ .

Hvis  $\mathbb{R}^n$  har en basis  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$  af egenvektorer, hvor  $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$  for alle  $i = 1, 2, \dots, n$  så kan  $P$  vælges som

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_n]$$

og  $D$  er diagonalmatricen med egenverdierne  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  på diagonalen.

Det er vigtigt at rækkefølgen af søjler i  $P$  svarer til rækkefølgen af egenverdier på diagonalen af  $D$ .

## Diagonaliseringsalgoritme.

$A$ : en  $n \times n$  matrix.

Bestem det karakteristiske polynomium for  $A$ , og skriv

$$\det(A - xI_n) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}g(x),$$

hvor  $g(x)$  er et polynomium, der ikke har nogen (reelle) rødder.

Hvis graden af  $g(x)$  er mindst 2 og dermed  $m_1 + m_2 + \cdots + m_k < n$  så er  $A$  ikke diagonaliserbar.

Hvis  $g(x) = \pm 1$  og dermed  $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ :

For hver egen værdi  $\lambda_i$ :

find en basis for egenrummet  $\text{Null}(A - \lambda_i I)$ .

Hvis for en af disse egen værdier  $\dim \text{Null}(A - \lambda_i I) < m_i$  så er  $A$  ikke diagonaliserbar.

Ellers:

sæt alle baser for egenrum sammen i en mængde  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ , som er basis for  $\mathbb{R}^n$ .

Lad  $P = [\mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_n]$  og lad

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

være den diagonalmatrix der har egenværdierne for  $A$  på diagonalen, sådan at  $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$  for alle  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Så er

$$A = PDP^{-1}.$$

## Anvendelse af diagonalisering.

Hvis  $A = PDP^{-1}$  hvor  $D$  er diagonalmatricen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

så er

$$A^m = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_n^m \end{bmatrix} P^{-1},$$

for ethvert positivt helt tal  $m$ .