Lineær algebra - 19

Prikprodukt og norm.

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Så er prikproduktet af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ defineret som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Dette prikprodukt kan eventuelt udregnes som $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$.

$\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ siges at være ortogonale hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Normen (længden) af $\mathbf{u}$ er

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}.$$

Afstanden mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er $||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$.

Normalisering af $\mathbf{v}$:
Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så er $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ en vektor med norm 1.

Pythagoras: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ hvis og kun hvis $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$.

Cauchy-Schwarz: $-||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \leq \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \leq ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||$.

Trekantsulighed: $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$.

Ortogonale og ortonormale mængder.

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{S}$ siges at være ortogonal hvis vektorerne i $\mathcal{S}$ er parvis ortogonale.

$\mathcal{S}$ siges at være ortonormal hvis $\mathcal{S}$ er ortogonal og vektorerne i $\mathcal{S}$ alle har norm 1.

Enhver ortogonal mængde $\mathcal{S}$ af vektorer forskellig fra $\mathbf{0}$ er lineært uafhængig.

Ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på linien Span$\{\mathbf{v}\}$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}.$$

Hvis $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en **ortogonal basis** for et underrum W af $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{u} \in W$ så er

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k,$$

hvor

$$c_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{||\mathbf{v}_i||^2}.$$

Hvis $\mathcal{S}$ er orto*normal* så er

$$c_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i.$$

Gram-Schmidt ortogonalisering.

Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en basis for et underrum W af $\mathbb{R}^n$.
Så har W en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ der kan bestemmes ved Gram-Schmidt ortogonalisering:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2$$

$$\ldots$$

En ortonormal basis kan derefter bestemmes ved normalisering af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.