Lineær algebra - 19

Prikprodukt og norm.

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Så er prikproduktet af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ defineret som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Dette prikprodukt kan eventuelt udregnes som $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$.

$\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ siges at være ortogonale hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Normen (længden) af $\mathbf{u}$ er

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}.$$

Afstanden mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er $||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$.

Normalisering af $\mathbf{v}$:
Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så er $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ en vektor med norm 1.

Pythagoras: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ hvis og kun hvis $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$.

Cauchy-Schwarz: $-||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \leq \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \leq ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||$.

Trekantsulighed: $||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$.

Eks

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Så er $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 11$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

Afstand mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Cauchy-Schwarz:

$$-3 \cdot 5 \leq \vec{u} \cdot \vec{v} = 11 \leq 3 \cdot 5 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

Ortogonale og ortonormale mængder.

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{S}$ siges at være ortogonal hvis vektorerne i $\mathcal{S}$ er parvis ortogonale.

$\mathcal{S}$ siges at være ortonormal hvis $\mathcal{S}$ er ortogonal og vektorerne i $\mathcal{S}$ alle har norm 1.

Enhver ortogonal mængde $\mathcal{S}$ af vektorer forskellig fra $\mathbf{0}$ er lineært uafhængig.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

S er ortogonal

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \qquad \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 3$$

$$\left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} \right\}$$ er ortonormal

Ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på linien Span$\{\mathbf{v}\}$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}.$$

Hvis $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en **ortogonal basis** for et underrum W af $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{u} \in W$ så er

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k,$$

hvor

$$c_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{||\mathbf{v}_i||^2}.$$

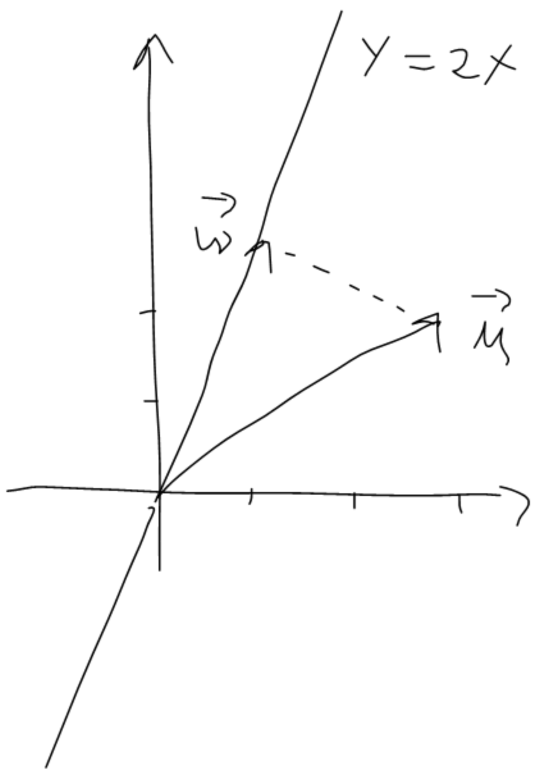
Hvis $\mathcal{S}$ er orto*normal* så er

$$c_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i.$$

Eks projektion

Find ortogonal projektion $\vec{w}$ af $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

på linien med ligning $y = 2x$



Vælg $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Så er linien = span $\vec{v}$

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{7}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

Gram-Schmidt ortogonalisering.

Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en basis for et underrum W af $\mathbb{R}^n$.
Så har W en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ der kan bestemmes ved Gram-Schmidt ortogonalisering:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2$$

$$\ldots$$

En ortonormal basis kan derefter bestemmes ved normalisering af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Eks Gram-Schmidt anvendt på

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Basis for $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \|\vec{v}_1\|^2 = 1^2+1^2+0^2 = 2$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}, \quad \|\vec{v}_2\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 =$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1\end{bmatrix}}{3/2}\begin{bmatrix}1/2\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \underbrace{\frac{1/2}{3/2}}_{\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-1/2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{6}\\\frac{4}{6}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}$$