

Lineær algebra - 20

Ortogonal komplement.

W et underrum af \mathbb{R}^n .

Det ortogonale komplement af W er *underrummet*

$$W^\perp = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ for alle } \mathbf{u} \in W \}.$$

For enhver vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ findes der entydige vektorer $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^\perp$ så

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}.$$

\mathbf{w} kaldes den ortogonale projektion af \mathbf{u} på W , og betegnes $U_W(\mathbf{u})$.

U_W er da en *lineær* operator på \mathbb{R}^n .

Ortogonal projektion.

Lad W være et underrum af \mathbb{R}^n med $\dim W = k > 0$ og C være en $n \times k$ matrix hvis søjler udgør en basis for W . Så har ortogonalprojektionsoperatoren U_W standardmatrix

$$P_W = C(C^T C)^{-1} C^T.$$

Den ortogonale projektion af \mathbf{u} på W kan altså beregnes som

$$U_W(\mathbf{u}) = P_W \mathbf{u},$$

eller, hvis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ er en *ortonormal* basis, som

$$U_W(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k) \mathbf{v}_k.$$

Underrum knyttet til matricer.

For ethvert underrum W af \mathbb{R}^n er

$$\dim W + \dim W^\perp = n \quad \text{og} \quad (W^\perp)^\perp = W.$$

For enhver matrix A er

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Null } A.$$

Ethvert underrum W af \mathbb{R}^n er søjlerum af en matrix og dermed også rækkerum af den transponerede matrix: $W = \text{Row } A$.

Det ortogonale komplement bestemmes altså som $W^\perp = \text{Null } A$.

Desuden kan vi nu se at ethvert underrum W af \mathbb{R}^n er nulrum af en matrix:

Lad A være en matrix så $\text{Row } A = W^\perp$.

Så er $\text{Null } A = (\text{Row } A)^\perp = (W^\perp)^\perp = W$.

Ortogonale matricer.

En $n \times n$ matrix $Q = [q_1 \dots q_n]$ siges at være ortogonal hvis $\{q_1 \dots q_n\}$ er en *ortonormal* mængde af vektorer (og dermed er en ortonormal basis for \mathbb{R}^n).

Det betyder at Q ortogonal hvis og kun hvis

$$Q^T Q = I_n.$$

En ortogonal matrix Q er altså invertibel med invers

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Det betyder at Q er en ortogonal matrix hvis og kun hvis Q^T er en ortogonal matrix.

Og at rækkerne i en ortogonal matrix er en ortonormal mængde af vektorer.