Lineær algebra - 22

Ortogonale matricer.

En $n \times n$ matrix $Q = [\mathbf{q}_1 \ \ldots \ \mathbf{q}_n]$ siges at være ortogonal hvis $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ er orto*normal*, altså hvis $Q^T Q = I_n$.

Hvis Q er en ortogonal matrix så er determinanten

$$\det Q = \pm 1.$$

Hvis P og Q er ortogonale matricer så er PQ en ortogonal matrix.

En $n \times n$ matrix Q er en ortogonal matrix hvis og kun hvis

$$||Q\mathbf{u}|| = ||\mathbf{u}||.$$

Q er altså ortogonal hvis og kun hvis Q bevarer norm (og dermed afstand).

Lad Q være en **ortogonal** 2×2 **matrix**.

Hvis $\det Q = 1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ.
Q er matricen for en rotation med vinklen θ.

Hvis $\det Q = -1$ så er $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ for en vinkel θ.
Q har egenvektorer $\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ med egenværdier henholdsvis 1 og -1.
Q er matricen for en spejling om linien med retningsvektor $\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$.
Denne linie er egenrum for Q med egenværdi 1.

Eks Spejling

$$Q = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \qquad Q \text{ er ortogonal}$$

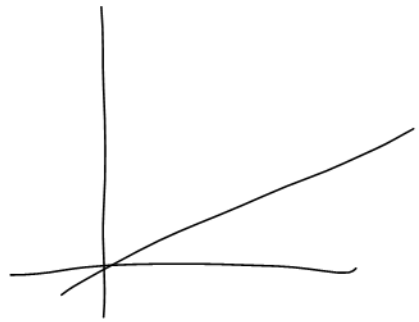
$$\det Q = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = -1$$

Q er matrix for en spejling

Egenrum med egenværdi 1

$$Q - I_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - 2x_2 = 0$ [illegible] $X - 2Y = 0$, $Y = \frac{1}{2}X$



Eks rotation i $\mathbb{R}^3$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q \text{ er ortogonal}$$

$$\det Q \overset{1.\ \text{række}}{=} 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Q er matrix for en rotation

Egenrum med egenværdi 1

$$Q - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrum $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Egenrum: $W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Q er rotation om denne linie.

Find basis for $W^{\perp}$:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 1×3 matrix

Să e $W = \text{Row } A$

$W^{\perp} = (\text{Row } A)^{\perp} = \text{Null } A$

x_2, x_3 free

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for $W^\perp$: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Sæt $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$C^TC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (C^TC)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matricen for projektion på $W^\perp$:

$$P_{W^\perp} = C(C^TC)^{-1}C^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Projektion af $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $W^\perp$:

$$P_{W^\perp}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

Lad Q være en **ortogonal** 3×3 **matrix**.

Så er Q matricen for en rotation hvis og kun hvis $\det Q = 1$.

Hvis P og Q er matricer for rotationer i $\mathbb{R}^3$ så er P og Q ortogonal matricer med determinant 1.
Så er PQ også en ortogonal matrix med determinant 1 og derfor er PQ også matricen for en rotation.

En funktion $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en **flytning** (rigid motion) hvis den bevarer afstand altså hvis

$$||F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})|| = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||,$$

for alle vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Lad $\mathbf{b} = F(\mathbf{0})$ og $T(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - \mathbf{b}$. Så er T en lineær transformation og en flytning. Standardmatricen for T er så en ortogonal matrix.

F kan altså skrives som

$$F(\mathbf{v}) = Q\mathbf{v} + \mathbf{b},$$

hvor Q er en ortogonal matrix.

(I litteraturen stilles ofte et yderligere krav for at F kaldes en flytning: nemlig at $\det Q = 1$ således at der ikke indgår spejlinger.)

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en flytning

Dvs $F(\vec{v}) = Q\vec{v} + \vec{b}$

$F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$F\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$, $F\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = Q\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \vec{b} - \left(Q\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \vec{b}\right) = Q\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad = Q\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \vec{b}$$

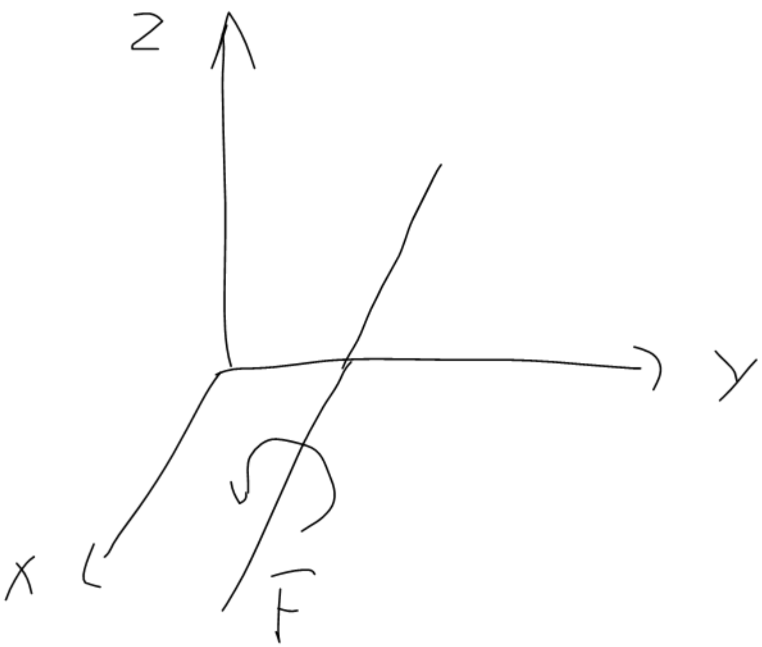
$$\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$Q\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) - \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$Q\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) - \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

rotation 180°
om x-aksen



Symmetriske matricer.

A en $n \times n$ matrix.

$\mathbb{R}^n$ har en ortonormal basis, hvis vektorer er egenvektorer for A

hvis og kun hvis

A er symmetrisk, altså $A^T = A$.

Diagonalisering af symmetriske matricer.

Lad A være en symmetrisk $n \times n$ matrix og lad $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^n$ så $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ hvor $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ er egenværdierne for A.

Lad $P = [\mathbf{v}_1 \; \mathbf{v}_2 \; \ldots \; \mathbf{v}_n]$
og $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ en diagonalmatrix.

Så er P en ortogonal matrix og

$$A = PDP^T.$$