

# Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet  
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Tirsdag den 4. januar, 2011. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver. Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder "multiple choice" opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: \_\_\_\_\_

STUDIENUMMMER: \_\_\_\_\_

- HOLD NUMMER:  Hold 2 (v. Jacob Broe)  
 Hold 3 (v. Olav Geil)  
 Hold 4 (v. Morten Nielsen)  
 Hold 5 (v. Bo Rosbjerg)  
 Hold 6 (v. Nikolaj Hess-Nielsen)

## Del I ("almindelige opgaver")

### Opgave 1 (6%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find  $A^{-1}$ .

### Opgave 2 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bring  $A$  på trappeform (række-echelonform).
2. Bestem determinanten af  $A$ .
3. Bestem determinanten af  $(A^3)^T$ .

### Opgave 3 (10%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til  $A$ .
2. Find en basis for nulrummet hørende til  $A$ .
3. Bestem rank  $A$  og nullity  $A$ .

#### Opgave 4 (10%).

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for underrummet  $W \subseteq \mathbb{R}^4$ .

1. Find ved hjælp af Gram-Schmidt processen en ortogonal basis for  $W$ .
2. Bestem herefter en ortonormal basis for  $W$ .

#### Opgave 5 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenverdierne for  $A$ .
2. Find en basis for hvert af de tilhørende egenrum.
3. Afgør om  $A$  er diagonaliserbar (husk at argumentere for dit svar).

#### Opgave 6 (8%).

Lad

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Vis, at  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$  er en basis for  $W$ .
2. Argumenter for, at  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$  ligger i  $W$ .
3. Lad  $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Bestem  $\mathbf{u}$ .

### Opgave 7 (8%).

Det oplyses, at

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

kan skrives  $A = PDP^{-1}$ , hvor

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Find den partikulære løsning til differentialligningssystemet

$$y_1' = 6y_1 + 6y_2$$

$$y_2' = -2y_1 - y_2$$

som opfylder bibetingelsen

$$\begin{cases} y_1(0) = -7 \\ y_2(0) = 4. \end{cases}$$

### Opgave 8 (10%).

En lineær transformation  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  er givet ved

$$T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem standardmatricen hørende til  $T$ .

2. Find  $T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ .

3. Er  $T$  surjektiv? (Alternativt dansk udtryk er "på". Engelske udtryk er "surjective" eller "onto").

4. Er  $T$  injektiv? (Alternativt dansk udtryk er "en-til-en". Engelske udtryk er "injective" eller "one-to-one").

## Del II ("multiple choice" opgaver)

### Opgave 9 (4%).

Der er givet tre vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^7$ , som er lineært *uafhængige*. Sæt

$$H = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}\}.$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

- Dimensionen af  $H$  er 7.
- Dimensionen af  $H$  er 3.
- $H$  kan beskrives som en linie i  $\mathbf{R}^7$ .

### Opgave 10 (10%).

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -15 & 7 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & -34 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 910 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlig*e sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- $A$  er inverterbar (regulær).
- Den lineære transformation induceret af  $A$  er injektiv (engelsk: one-to-one).
- $A$  er på række-echelonform (trappeform).
- nullity  $A = 1$ .
- rank  $A = 5$ .
- nullity  $A + \text{rank } A = 6$ .
- Tallet  $-15$  er egen værdi for  $A$ .
- $A$  er på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
- Der findes et  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^5$ , således at ligningssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ikke er konsistent.
- $A$  er en  $4 \times 4$ -matrix.
- $A$  er diagonaliserbar.

### Opgave 11 (6%).

Der er givet en lineær afbildning  $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Besvar følgende to spørgsmål.

Bestem den største værdi af  $n$ , for hvilken der med sikkerhed gælder, at  $S$  *ikke* er surjektiv (engelsk: onto):

- |                            |                            |                            |                            |                            |                             |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 10 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 11 |

Bestem den største værdi af  $n$ , for hvilken der gælder, at  $S$  *kan* være være injektiv (engelsk: one-to-one):

- |                            |                            |                            |                            |                            |                             |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 8 | <input type="checkbox"/> 10 |
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 7 | <input type="checkbox"/> 9 | <input type="checkbox"/> 11 |

## Opgave 12 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

- a. Enhver symmetrisk  $4 \times 4$ -matrix kan diagonaliseres.

Sand

Falsk

- b. Der findes en lineær transformation  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^5$  som er surjektiv (engelsk: onto).

Sand

Falsk

- c. Der findes en lineær operator  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , med en ortogonal matrix som standardmatrice, således at  $T(\mathbf{e}_1) = 4\mathbf{e}_3$ , hvor  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  er standardbasen for  $\mathbf{R}^3$  (dvs. søjlerne i  $I_3$ ).

Sand

Falsk

- d. Lad  $W$  være et underrum af  $\mathbf{R}^5$  med dimension 4. Så udgør enhver ortonormal mængde af 4 vektorer i  $W$  en basis for  $W$ .

Sand

Falsk

- e. En kvadratisk matrix  $A$  er inverterbar (regulær), hvis og kun hvis 0 ikke er en egen værdi for  $A$ .

Sand

Falsk