Eksamen i Lineær Algebra

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
& Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Onsdag den 11. januar, 2012. Kl. 9-13.

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”almindelige opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice”opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLDNUMMER:

- ☐ HOLD 1 (v. Jacob Broe).
- ☐ HOLD 2 (v. Olav Geil).
- ☐ HOLD 3 (v. Leif Kjær Jørgensen).
- ☐ HOLD 4 (v. Bo Rosbjerg).
- ☐ HOLD 5 (v. Martin Raussen).

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (8%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på reduceret trappeform (reduceret echelonform).
2. Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Opgave 2 (6%).

Lad

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde om udtrykket giver mening. For hvert udtryk, der giver mening, beregn værdien.

1. $B\mathbf{b}$ 2. $C\mathbf{b}$ 3. BC 4. CB.

Opgave 3 (9%).

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem A^{-1}.
2. Beregn $\det A$ og $\det(A^9)$.

Opgave 4 (9%).

En lineær transformation (lineær afbildning) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.
2. Bestem standardmatricen A hørende til T.
3. Bestem rank A og nullity A.

Opgave 5 (10%).

Lad

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Vis, at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.
2. Vektoren $\mathbf{u}$ har koordinater

   $$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   med hensyn til $\mathcal{B}$. Bestem $\mathbf{u}$.
3. En lineær operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er defineret ved

   $$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Bestem $[T]_{\mathcal{B}}$.

Opgave 6 (10%).

Givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Gør rede for, at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   er egenvektorer for A og bestem de tilhørende egenværdier.

2. Diagonaliser A. Dvs. bestem en diagonalmatrix D og en invertibel (invertbar, regulær) matrix P således at $A = PDP^{-1}$.

3. Bestem P^{-1}.

4. Bestem A^2 og A^{2012}.

Opgave 7 (10%).

Underrummet $W \subseteq \mathbb{R}^4$ har basis

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Bestem en ortogonal basis for W ved hjælp af Gram-Schmidt processen.

2. Bestem herefter en ortonormal basis for W.

Opgave 8 (10%).

Givet

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem matricen P_W for ortogonalprojektionen af $\mathbb{R}^3$ på W.
2. Bestem vektorerne $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^{\perp}$ således at $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (4%).

Der er givet reelle tal a, b, c, vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

samt en matrix $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$ med vektorerne som søjlevektorer.
Præcis et af følgende udsagn er korrekt. Afkryds dette.

☐ rank $A = 2$.
☐ nullity $A = 2$.
☐ A er invertibel (inverterbar, regulær).
☐ Med de givne oplysninger kan det ikke afgøres om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uafhængig.

Opgave 10 (6%).

Der er givet to 3×3-matricer A og B.
A er singulær (ikke invertibel) og $\det B = -1$.
Afkryds for hvert af følgende tre spørgsmål det rigtige svar.

$\det((B^T B)^{-1}) =$

☐ -2 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1

$\det(2B) =$

☐ -8 ☐ -2 ☐ -1 ☐ 8

$\det(B^T A B) =$

☐ -2 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1

Opgave 11 (10%).

Der er givet tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$ som opfylder

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er lineært uafhængig.
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært afhængig.
- $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$.

Vi betragter:

- Underrummet $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
- Matricen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$ med vektorerne som søjler.
- Den lineære operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- ☐ $\mathbf{v}_3$ er indeholdt i W.
- ☐ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er en basis for W.
- ☐ T er surjektiv (engelsk: surjective eller on-to).
- ☐ T er injektiv (engelsk: injective eller one-to-one).
- ☐ A er invertibel (inverterbar, regulær).
- ☐ $\det A = 0$.
- ☐ 0 er egenværdi for A.
- ☐ $\mathbf{v}_3$ er indeholdt i $W^{\perp}$.

Opgave 12 (8%).

I denne opgave undersøges lineære operatorer fra $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$. Vi betragter 2×2 matricer A og B hvor:

- A er standardmatricen for en rotation med vinklen θ. Her opfylder θ, at $0^\circ < \theta < 90^\circ$.
- B er standardmatricen for en spejling omkring en linie $\mathcal{L}$ i $\mathbb{R}^2$.

Besvar følgende fire sand/falsk opgaver:

a. $\det B = -1$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der findes en basis $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ for $\mathbb{R}^2$ bestående af egenvektorer for B.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Der findes en basis $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ for $\mathbb{R}^2$ bestående af egenvektorer for A.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Matricen BA har egenværdier 1 og -1.

☐ Sand ☐ Falsk