Prøveeksamen B i "Lineær Algebra"

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet og Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der må ikke benyttes lommeregner, mobiltelefon eller computer.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Dette eksamenssæt har to uafhængige dele. Del I indeholder "almindelige opgaver". I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang. Del II indeholder "multiple choice"opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst.

NAVN: ______________________________

STUDIENUMMMER: ______________________________

HOLD NUMMER: ______________________________

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1:(5%) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$$

1. Udregn AB.
2. Find $B^T A^T$.

Opgave 2:(10%) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på reduceret række-echelonform (reduceret trappeform).
2. Kald den reducerede række-echelonform af A for R. Bestem det R.
3. Bestem det A.

Opgave 3:(10%) Betragt underrummet

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} r+2s \\ 2s \\ r+2s \end{bmatrix} \ : \ r \in \mathbf{R} \ \text{ og } \ s \in \mathbf{R} \right\} \subseteq \mathbf{R}^3.$$

1. Find en basis for V.
2. Hvad er dimensionen af V?
3. Er $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en basis for V? (Argumenter for dit svar.)
4. Er $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en basis for V? (Argumenter for dit svar.)

Opgave 4:(10%) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne af A.
2. Bestem de tilhørende egenrum.
3. Find matricer P og D, så P er inverterbar (regulær), D er en diagonalmatrix og $A = PDP^{-1}$ holder.

Opgave 5:(8%) Lad

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Argumenter for, at $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

2. Lad $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ være en vektor med $\mathcal{B}$-koordinat-vektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestem $\mathbf{v}$.

Lad T være en lineær operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hvor det oplyses, at

$$T([\ 1 \quad 0 \quad 0\ ]^T) = [\ 1 \quad 0 \quad 1\ ]^T$$
$$T([\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]^T) = [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]^T$$
$$T([\ 0 \quad 1 \quad 1\ ]^T) = [\ 1 \quad 1 \quad 0\ ]^T.$$

3. Find $T([\ 1 \quad 0 \quad 1\ ]^T)$ og $T([\ 1 \quad 1 \quad 0\ ]^T)$.

4. Opskriv matrixrepræsentationen for T med hensyn til $\mathcal{B}$.

Opgave 6:(10%)

Lad W være løsningsmængden til

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$.

1. Bestem den ortogonale projektionsmatrix P_W.

2. Find $\mathbf{w} \in W$ og $\mathbf{z} \in W^{\perp}$, så $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$.

3. Find afstanden fra $\mathbf{u}$ til W.

Opgave 7:(9%) Lad $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Undersøg om C er inverterbar (regulær), og bestem i så fald C^{-1}.

Opgave 8:(8%) Betragt

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

1. Er S lineært afhængig? (Husk, at argumentere for dit svar.)
2. Ligger $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i spændet af S (the span of S)? (Husk, at argumentere for dit svar.)

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9:(5%)
Der er givet to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, som er lineært *uafhængige*. Sæt

$$H = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

☐ H er et underrum af $\mathbf{R}^3$.
☐ H kan beskrives som en linie i $\mathbf{R}^3$.
☐ Der findes et $c \in \mathbf{R}$, således at enten er $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$, eller også er $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

Opgave 10:(12%)
Der er givet to 3×3-matricer A og B. Det oplyses, at $\det A = 2$ og $\det B = -3$. Besvar nedenstående spørgsmål baseret på disse oplysninger:

a. Bestem værdien af: $\det(-B)$

☐ 0 ☐ -3 ☐ 3 ☐ 2

b. Bestem værdien af: $\det(A^2B)$

☐ -12 ☐ -8 ☐ 12 ☐ 0

c. Bestem værdien af: $\det(A(B^T)^2)$

☐ 1 ☐ -6 ☐ 18 ☐ 9

d. Bestem værdien af: $\det(-AB)$

☐ 6 ☐ -6 ☐ -18 ☐ 2

Opgave 11:(8%) Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

a. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^n$. Hvis $\mathbf{w}$ ligger i både W og $W^\perp$ så gælder at $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

☐ Sand ☐ Falsk

b. Betragt ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hvor A er en 7×8-matrix. Ligningssystemet har uendelig mange løsninger.

☐ Sand ☐ Falsk

c. Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, så gælder at enten $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^4$ med dimension 3. Det er muligt at vælge et antal vektorer fra W, som udgør en basis for $\mathbf{R}^4$.

☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 12:(5%) Der er givet tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$, således at $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er lineært *uafhængige*, mens $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ er lineært *afhængige*. Sæt

$$H = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$$

Afkryds det sande udsagn nedenfor.

☐ Der gælder altid, at $\mathbf{v}$ kan skrives som en linearkombination af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{w}$.
☐ Der gælder altid, at $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ er lineært uafhængige.
☐ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ er ikke en basis for H.