Eksamen i Matematik for Computer Grafik

Medialogi, 5. semester, Aalborg Universitet
Tirsdag den 8. marts 2011, kl. 9.00–13.00.

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. Herunder lommeregnere, men ikke personlige computere og mobiltelefoner.
Bemærkninger: *Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen, og at mellemregninger medtages i passende omfang.*
Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (16 %)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Vis at $\det(A) = 1$ og at $AA^T = I$. Konkluder at A er en rotationsmatrix.
2. Bestem rotationsvinkel og rotationsakse for denne rotation.
3. Hvad bliver punktet $(3, 2, 1)$ roteret over i?
4. Bestem den inverse matrix A^{-1}.

Opgave 2 (12 %)

I denne opgave ser vi på en Hermite kurve $Q(u)$, der opfylder

$$Q(0) = P_0 = (0, 0, 0)^T$$

$$Q(1) = P_1 = (2, 2, 2)^T$$

$$Q'(0) = \mathbf{P}'_0 = (2, 1, 0)^T$$

$$Q'(1) = \mathbf{P}'_1 = (0, 1, 2)^T.$$

1. Bestem $Q(u)$.
2. Bestem $Q(\frac{1}{2})$.

Opgave 3 (18 %)

En plan i rummet går gennem punkterne $P_0 = (0,0,0)$, $P_1 = (5,2,3)$ og $P_2 = (1,1,0)$.

1. Bestem planens ligning.
2. Ligger punktet $P = (2,1,1)$ på denne plan?
3. Bestem de Barycentriske koordinater for P (med hensyn til det affine rum udspændt af P_0, P_1 og P_2).

Opgave 4 (10 %)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & -1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem $\det(A)$.
2. For hvilke værdier af a, b, c, d har A en invers matrix.

Opgave 5 (8 %)

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ opfylder at $T((1,0,0,0)^T) = (1,0)^T$, $T((0,1,0,0)^T) = (2,0)^T$, $T((0,0,1,0)^T) = (0,0)^T$ og $T((0,0,0,1)^T) = (1,3)^T$.

1. Bestem en matrix B så $T(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$.
2. Findes der en vektor $\mathbf{x}$ som bliver transformeret over i $(3,3)^T$?

Opgave 6 (6 %)

Find kvaternionen, der svarer til en rotation om aksen $(2,1,2)^T$ med vinklen $90°$.

Opgave 7 (6 %)

Betragt kvaternionerne $p = (1, 0, -1, 0)$ og $q = (0, 1, 2, -1)$. Udregn pq.

Opgave 8 (18 %)

Lad $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. Bestem den normaliserede vektor $\hat{\mathbf{n}}$ med samme retning som $\mathbf{n}$.
2. S er nu en lineær transformation, som er en shear omkring planen gennem origo med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ og shearvektor (forskydningsvektor) $\mathbf{s}$. Bestem matricen for S.
3. T er en affin transformation, som er en shear omkring planen gennem punktet $(1, 1, 1)$ med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ og shearvektor (forskydningsvektor) $\mathbf{s}$. Bestem den matrix der hører til T.
4. Hvor bliver punktet $(1, 0, 0)$ afbildet til ved den affine transformation T.

Opgave 9 (6 %)

R er rotationen med matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem Euler vinkler θ_x, θ_y, θ_z sådan at R fremkommer som en rotation om z-aksen med vinklen θ_z efterfulgt af en rotation om y-aksen med vinklen θ_y efterfulgt af en rotation om x-aksen med vinklen θ_x.

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side.

Facit

Opgave 1

1. F.eks. ombytning af række 2 og 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1.$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Vi ved at en ortogonal matrix med determinant 1 er en rotationsmatrix.

2. $\mathrm{trace}(A) = 1$, $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{2}(\mathrm{trace}(A) - 1)) = \cos^{-1}(0) = 90°$.
   $\mathbf{r} = (A_{21} - A_{12}, A_{02} - A_{20}, A_{10} - A_{01})^T = (-2, 0, 0)^T$.
   $\hat{\mathbf{r}} = (-1, 0, 0)^T$.

3. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

4. Da $AA^T = I$ er $A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Opgave 2

1. Sæt

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \mathbf{P_0'} \\ \mathbf{P_1'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Så er $Q(t) = UMG = (-2u^3 + 2u^2 + 2u, -2u^3 + 3u^2 + u, -2u^3 + 4u^2)$.

2. $Q(\frac{1}{2}) = (\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4})$.

Opgave 3

1. Sæt $\mathbf{u} = P_1 - P_0 = (5, 2, 3)^T$, $\mathbf{v} = P_2 - P_0 = (1, 1, 0)^T$. Sæt $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-3, 3, 3)^T$. Planen ligning er altså $-3(x - 0) + 3(y - 0) + 3(z - 0) = 0$. Dette kan forkortes til $-x + y + z = 0$.

2. Ved indsætning af $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ i planens ligning fås $0 = 0$. Punktet P ligger altså på planen.

3. Sæt $\mathbf{w} = P - P_0 = (2, 1, 1)^T$. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = s(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \Rightarrow (1, -1, -1) = s(3, -3, -3) \Rightarrow s = \frac{1}{3}$.

   $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \Rightarrow (-1, 1, 1) = t(-3, 3, 3) \Rightarrow t = \frac{1}{3}$.

   Barycentriske koordinater for P: $(1 - s - t, s, t) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Opgave 4

1.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & -1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = c(-b) \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -bc(a+1),$$

   hvor der er anvendt udvikling efter 3. søjle og derefter efter 1. søjle.

2. A har en invers når $\det(A) \neq 0$. Altså når $a \neq -1$ og $b \neq 0$ og $c \neq 0$. (Værdien af d har ingen indflydelse på om A har en invers.)

Opgave 5

1. $B = \left[T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right) \; T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Ja, f.eks. $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 1)^T$.

Opgave 6

$\mathbf{r} = (2, 1, 2)^T$. Så er $||\mathbf{r}|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$ og $\hat{\mathbf{r}} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$. $\theta = 90°$.
Kvaternionen, der svarer til rotation om $\hat{\mathbf{r}}$ med vinkel θ:

$$(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{r}}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}).$$

Opgave 7

$$pq = (2, 2, 2, 0).$$

Opgave 8

1. $||\mathbf{n}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}\mathbf{n} = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

2. $\mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} s_x n_x & s_x n_y & s_x n_z \\ s_y n_x & s_y n_y & s_y n_z \\ s_z n_x & s_z n_y & s_z n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
   Matricen for S:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0^T} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sæt $\mathbf{x} = (1,1,1)^T$ og $R = \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}}$. Så er $(I - R)\mathbf{x} = (0, 3, -3)^T$.
   Matricen for T:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} & (I - R)\mathbf{x} \\ \mathbf{0^T} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   T afbilder altså punktet $(1, 0, 0)$ i punktet $(1, 4, -4)$.

Opgave 9

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

θ_y bestemmes ved $\sin\theta_y = R_{02} = 1$. Altså $\theta_y = 90°$.
Da $\cos\theta_y = 0$ kan vi (f.eks.) vælge $\theta_z = 0°$ og derefter bestemme θ_x ved $\sin\theta_x = R_{21} = 0$, $\cos\theta_x = R_{11} = -1$. Altså $\theta_x = 180°$.