Eksamen i Matematik for Computer Grafik

Medialogi, 5. semester, Aalborg Universitet

Torsdag den 6. januar 2011, kl. 9.00–13.00.

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. Herunder lommeregnere, men ikke personlige computere og mobiltelefoner.
Bemærkninger: *Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen, og at mellemregninger medtages i passende omfang.*
Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (10 %)

En plan i rummet er udspændt af vektorerne $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1. Bestem en normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ til denne plan, så $\hat{\mathbf{n}}$ har længde 1.
2. Bestem planens ligning.
3. Bestem afstanden mellem planen og punktet $(1, 2, 3)$.

Opgave 2 (14 %)

Der er givet følgende punkter i rummet $P_0 = (0, 2, 0)$, $P_1 = (1, 2, 1)$, $P_2 = (1, -2, -1)$ og $P = (\frac{1}{2}, 1, 0)$. Det oplyses at P ligger i trekanten med hjørner P_0, P_1, P_2.

1. Bestem tal s og t så $P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0)$.
2. Bestem de barycentriske koordinater for P med hensyn til P_0, P_1, P_2.

Opgave 3 (16 %)

Lad $\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. $\mathcal{S}$ er en lineær transformation, som er en shear omkring planen gennem origo med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ og shearvektor (forskydningsvektor) $\mathbf{s}$. Bestem den matrix der hører til $\mathcal{S}$.

2. $\mathcal{T}$ er en affin transformation, som er en shear omkring planen gennem punktet $(1, 1, 1)$ med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ og shearvektor (forskydningsvektor) $\mathbf{s}$. Bestem den matrix der hører til $\mathcal{T}$.

3. Hvor bliver punktet $(1, 0, 0)$ afbildet til ved henholdsvis $\mathcal{S}$ og $\mathcal{T}$.

Opgave 4 (15 %)

En lineær transformation $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ opfylder at $\tau((1, 0, 0)^T) = (\frac{9}{25}, -\frac{4}{5}, -\frac{12}{25})^T$, $\tau((0, 1, 0)^T) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})^T$ og $\tau((0, 0, 1)^T) = (-\frac{12}{25}, -\frac{3}{5}, \frac{16}{25})$.

1. Find en matrix A så $\tau(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$.

2. Det oplyses nu at τ er en rotation. Bestem θ og $\mathbf{r}$ så τ er en rotation om aksen $\mathbf{r}$ med vinklen θ.

Opgave 5 (9 %)

1. Punktet P_1 i planen har rektangulære koordinater $(x, y) = (-3, -3)$. Bestem de polære koordinater for P_1.

2. Et punkt P_2 i rummet har sfæriske koordinater $(\rho, \phi, \theta) = (2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$. (Vinkler er angivet i radianer.) Bestem de rektangulære koordinater (x, y, z) for P_2.

Opgave 6 (15 %)

1. Find kvaternionen p, som svarer til rotation om aksen $(1,0,0)^T$ med vinklen 180°.
2. Find kvaternionen q, som svarer til rotation om aksen $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ med vinklen 120°.
3. Find kvaternionen, der svarer til en rotation om aksen $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$ med vinklen 120° efterfulgt af en rotation om aksen $(1,0,0)^T$ med vinklen 180°.

Opgave 7 (7 %)

Betragt Bézier kurven $Q(u)$ med kontrolpunkter $P_0 = (0,0,0), P_1 = (1,0,0), P_2 = (1,1,0), P_3 = (1,1,1)$.

1. Bestem kurven $Q(u)$.
2. Bestem $Q(\frac{1}{2})$.

Opgave 8 (14 %)

Vi betragter i denne opgave rotationen R, der er repræsenteret af den normaliserede kvaternion $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

1. Bestem matricen for R.
2. Bestem derefter Euler vinkler θ_x, θ_y, θ_z sådan at R fremkommer som en rotation om z-aksen med vinklen θ_z efterfulgt af en rotation om y-aksen med vinklen θ_y efterfulgt af en rotation om x-aksen med vinklen θ_x.

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side.

Facit

Opgave 1

1. Sæt $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (4, 2, -4)^T$. $||\mathbf{n}|| = \mathbf{6}$. Så er $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{6}\mathbf{n} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$ er normal vektor af længde 1.

2. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = 0$.

3. Indsæt $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ på venstresiden: $\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 3 = -\frac{2}{3}$. Afstanden er $|-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$.

Opgave 2

1. $\mathbf{u} = P_1 - P_0 = (1, 0, 1)^T$, $\mathbf{v} = P_2 - P_0 = (1, -4, -1)^T$, $\mathbf{w} = P - P_0 = (\frac{1}{2}, -1, 0)^T$.
   $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = s(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \Rightarrow (-1, -\frac{1}{2}, 1) = s(-4, -2, 4) \Rightarrow s = \frac{1}{4}$.
   $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \Rightarrow (1, \frac{1}{2}, -1) = t(4, 2, -4) \Rightarrow t = \frac{1}{4}$.

2. Barycentriske koordinater for P: $(1 - s - t, s, t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Opgave 3

1. $\mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} s_x n_x & s_x n_y & s_x n_z \\ s_y n_x & s_y n_y & s_y n_z \\ s_z n_x & s_z n_y & s_z n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Matricen for $\mathcal{S}$:
   $$\mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0^T} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sæt $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ og $R = \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}}$. Så er $(I - R)\mathbf{x} = (\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})^{\mathbf{T}}$.
   Matricen for $\mathcal{T}$:
   $$\begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} & (I - R)\mathbf{x} \\ \mathbf{0^T} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}(1,0,0,1)^T = (1,0,0,1)^T$. Altså $\mathcal{S}(1,0,0) = (1,0,0)$.
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}(1,0,0,1)^T = (0,1,0,1)^T$. Altså $\mathcal{T}(1,0,0) = (0,1,0)$.

Opgave 4

1. $A = \left[\tau\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \ \tau\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) \ \tau\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \right] = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$.

2. $\mathrm{trace}(A) = 1$, $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{2}(\mathrm{trace}(A) - 1)) = \cos^{-1}(0) = 90°$.
$\mathbf{r} = (A_{21} - A_{12}, A_{02} - A_{20}, A_{10} - A_{01})^T = (\frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{5})^T$.
$\hat{\mathbf{r}} = ((\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})^T$.

Opgave 5

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
$\theta = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi = \arctan(1) + \pi = \frac{pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, da $x < 0$.
Polære koordinater: $(r, \theta) = (3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$.

2. $x = \rho \sin\phi \cos\theta = 2 \sin\frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$.
$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 2 \sin\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
$z = \rho \cos\phi = 2 \cos\frac{\pi}{2} = 0$.
Rektangulære koordinater $(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 0)$.

Opgave 6

1. $\theta_1 = 180°$, $\hat{\mathbf{r_1}} = (1,0,0)^T$. Bemærk $||\hat{\mathbf{r_1}}|| = 1$.
   $p = (\cos\frac{\theta_1}{2}, \sin\frac{\theta_1}{2}\hat{\mathbf{r_1}}) = (0,1,0,0)$.

2. $\theta_2 = 120°$, $\hat{\mathbf{r_2}} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$. Bemærk $||\hat{\mathbf{r_2}}|| = 1$.
   $p = (\cos\frac{\theta_2}{2}, \sin\frac{\theta_2}{2}\hat{\mathbf{r_2}}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

3. $pq = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{k}$.

Opgave 7

1. $Q(u) = (1-u)^3P_0 + 3u(1-u)^2P_1 + 3u^2(1-u)P_2 + u^3P_3 = (3u(1-u)^2 + 3u^2(1-u) + u^3, 3u^2(1-u) + u^3, u^3) = (3\,u - 3\,u^2 + u^3, 3\,u^2 - 2\,u^3, u^3)$.

2. $Q(\frac{1}{2}) = (\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$.

Opgave 8

1. $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (w, x, y, z)$.

$$R = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $\sin\theta_y = \mathbf{R_{02}} = \mathbf{0}, \cos\theta_\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{1} - \sin^\mathbf{2}\theta_\mathbf{y}} = \mathbf{1}$. Altså $\theta_y = 0°$.
   $\sin\theta_x = -\frac{\mathbf{R_{12}}}{\cos\theta_\mathbf{y}} = 1, \cos\theta_x = \frac{\mathbf{R_{22}}}{\cos\theta_\mathbf{y}} = 0$. Altså $\theta_x = 90°$.
   $\sin\theta_z = -\frac{\mathbf{R_{01}}}{\cos\theta_\mathbf{y}} = 1, \cos\theta_z = \frac{\mathbf{R_{00}}}{\cos\theta_\mathbf{y}} = 0$. Altså $\theta_z = 90°$.