

Eksamen i Matematik for Computer Grafik

Medialogi, 5. semester, Aalborg Universitet

Tirsdag den 8. marts 2011, kl. 9.00–13.00.

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. Herunder lommeregnere, men ikke personlige computere og mobiltelefoner.

Bemærkninger: *Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen, og at mellemregninger medtages i passende omfang.*

Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (16 %)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Vis at $\det(A) = 1$ og at $AA^T = I$. Konkluder at A er en rotationsmatrix.
2. Bestem rotationsvinkel og rotationsakse for denne rotation.
3. Hvad bliver punktet $(3, 2, 1)$ roteret over i?
4. Bestem den inverse matrix A^{-1} .

Opgave 2 (12 %)

I denne opgave ser vi på en Hermite kurve $Q(u)$, der opfylder

$$Q(0) = P_0 = (0, 0, 0)^T$$

$$Q(1) = P_1 = (2, 2, 2)^T$$

$$Q'(0) = \mathbf{P}'_0 = (2, 1, 0)^T$$

$$Q'(1) = \mathbf{P}'_1 = (0, 1, 2)^T.$$

1. Bestem $Q(u)$.
2. Bestem $Q(\frac{1}{2})$.

Opgave 3 (18 %)

En plan i rummet går gennem punkterne $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (5, 2, 3)$ og $P_2 = (1, 1, 0)$.

1. Bestem planens ligning.
2. Ligger punktet $P = (2, 1, 1)$ på denne plan?
3. Bestem de Barycentriske koordinater for P (med hensyn til det affine rum udspændt af P_0 , P_1 og P_2).

Opgave 4 (10 %)

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & -1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem $\det(A)$.
2. For hvilke værdier af a, b, c, d har A en invers matrix.

Opgave 5 (8 %)

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ opfylder at $T((1, 0, 0, 0)^T) = (1, 0)^T$, $T((0, 1, 0, 0)^T) = (2, 0)^T$, $T((0, 0, 1, 0)^T) = (0, 0)^T$ og $T((0, 0, 0, 1)^T) = (1, 3)^T$.

1. Bestem en matrix B så $T(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$.
2. Findes der en vektor $\mathbf{x}$ som bliver transformeret over i $(3, 3)^T$?

Opgave 6 (6 %)

Find kvaternionen, der svarer til en rotation om akse $(2, 1, 2)^T$ med vinklen 90° .

Opgave 7 (6 %)

Betragt kvaternionerne $p = (1, 0, -1, 0)$ og $q = (0, 1, 2, -1)$. Udregn pq .

Opgave 8 (18 %)

Lad $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ og lad $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. Bestem den normaliserede vektor $\hat{\mathbf{n}}$ med samme retning som $\mathbf{n}$.
2. S er nu en lineær transformation, som er en shear omkring planen gennem origo med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ og shearvektor (forskydningsvektor) $\mathbf{s}$. Bestem matricen for S .
3. T er en affin transformation, som er en shear omkring planen gennem punktet $(1, 1, 1)$ med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ og shearvektor (forskydningsvektor) $\mathbf{s}$. Bestem den matrix der hører til T .
4. Hvor bliver punktet $(1, 0, 0)$ afbildet til ved den affine transformation T .

Opgave 9 (6 %)

R er rotationen med matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem Euler vinkler $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ sådan at R fremkommer som en rotation om z -aksen med vinklen θ_z efterfulgt af en rotation om y -aksen med vinklen θ_y efterfulgt af en rotation om x -aksen med vinklen θ_x .

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side.