Eksamen i Matematik for Computer Grafik

Medialogi, 5. semester, Aalborg Universitet

Fredag den 19. august 2011, kl. 10.00–14.00.

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages. Herunder lommeregnere, men ikke personlige computere og mobiltelefoner.
Bemærkninger: *Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen, og at mellemregninger medtages i passende omfang.*
Ved hver opgave er angivet hvordan opgaven vægtes ved bedømmelsen.

Opgave 1 (6 %)

Betragt punktet punktet P med rektangulære koordinater $(x, y) = (2, -2)$.
Bestem de polære koordinater for P.

Opgave 2 (16 %)

I denne opgave ser vi på en Hermite kurve $Q(u)$, der opfylder

$$Q(0) = P_0 = (0, 0, 0)^T$$
$$Q(1) = P_1 = (1, 2, 3)^T$$
$$Q'(0) = \mathbf{P}'_0 = (1, 1, 1)^T$$
$$Q'(1) = \mathbf{P}'_1 = (0, 0, 0)^T.$$

1. Bestem $Q(u)$.
2. Bestem $Q(\frac{1}{2})$.

Opgave 3 (20 %)

En plan i rummet går gennem punkterne $P_0 = (0, 1, 0)$, $P_1 = (2, 3, 4)$ og $P_2 = (1, 0, -2)$.

1. Bestem planens ligning.
2. Ligger punktet $P = (1, 1, 0)$ på denne plan?
3. Bestem de Barycentriske koordinater for P (med hensyn til det affine rum udspændt af P_0, P_1 og P_2).

Opgave 4 (12 %)

Lad $\mathbf{n} = (1, 2, 2)^T$ og lad S være spejlingen om planen gennem $(0, 0, 0)$ med normalvektor $\mathbf{n}$.

1. Bestem matricen for den lineære transformation S.
2. Hvad bliver punktet $(1, 2, 2)$ afbildet over i ved spejlingen S?

Opgave 5 (12 %)

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ opfylder at $T((1, 0, 0)^T) = (1, 1, 2)^T$, $T((0, 1, 0)^T) = (-1, -1, 1)^T$ og $T((0, 0, 1)^T) = (2, 2, 3)^T$.

1. Bestem en matrix B så $T(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.
2. Bestem determinanten af B.
3. Har B en invers matrix?

Opgave 6 (7 %)

Find kvaternionen, der svarer til en rotation om aksen $(0, 1, 0)^T$ med vinklen 180°.

Opgave 7 (7 %)

Betragt kvaternionerne $p_1 = (0, \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$ og $p_2 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}, 0)$, der svarer til rotationerne henholdvis R_1 og R_2.
En rotation R fås ved først at udføre rotationen R_2 og dernæst R_1. Bestem kvaternionen, der svarer til rotationen R.

Opgave 8 (20 %)

R er rotationen med matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem en vektor $\hat{\mathbf{r}}$ og en vinkel θ sådan at R er en rotation med vinkel θ om aksen med retningsvektor $\hat{\mathbf{r}}$.
2. Lad nu S være rotation med vinklen θ om aksen gennem punktet $(1, 1, 1)$ med retningsvektor $\hat{\mathbf{r}}$.
   Bestem matricen for den affine transformation S.
3. Hvad bliver punktet $(2, 0, 2)$ roteret over i ved rotationen S?

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side.