Omprøve i "Matematik for Computer Grafik"

Medialogiuddannelsen, 5. semester og Spiluddannelsen, 7. semester

Torsdag 12. marts 2009, i tidsrummet 9.00-13.00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
Herunder lommeregnere, men ikke personlige computere og mobiltelefoner.
Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen og at mellemregninger medtages i passende omfang.
De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Opgavesættet indeholder 8 opgaver. Disse listes nedenfor først på dansk og dernæst på engelsk.

Opgave 1:(20%)

6 1. Betragt rotation omkring aksen $\vec{r} = (3, 4, 0)^T$ med vinklen 90°. Find den tilhørende rotationsmatrice

1 2. Hvad bliver punktet $(6, 8, 0)^T$ roteret over i?

4 1 3. Betragt den affine transformation svarende til at vi først udfører rotationen fra delspørgsmål 1 og dernæst translaterer alting med $(1, 2, 3)^T$. Opskriv matricen, som beskriver denne affine transformation. Hvad bliver punktet $(6, 8, 0)^T$ flyttet over i?

7 1 4. Betragt den affine transformation svarende til at vi først translaterer alting med $(1, 2, 3)^T$ og dernæst roterer alting med rotationen fra delspørgsmål 1. Opskriv matricen, som beskriver denne affine transformation. Hvad bliver punktet $(6, 8, 0)^T$ flyttet over i?

Opgave 2:(15%)

4 1. Find kvaternionen p, som svarer til rotation omkring aksen $(1, 0, 1)^T$ med vinklen 90°

4 2. Find kvaternionen q, som svarer til rotation omkring aksen $(-1, 0, -1)^T$ med vinklen 90°.

7 3. Beregn kvaternionsproduktet pq.

Opgave 3:(10%) Det oplyses, at

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

er en rotationsmatrice. Find den inverse A^{-1}.

Opgave 4:(14%) Lad en lineær transformation $\tau : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ være givet ved

$$\begin{aligned} \tau([1, 0]^T) &= [1, 0, 0]^T \\ \tau([0, 1]^T) &= [0, 1, 0]^T \end{aligned}$$

6 1. Bestem en matrix C så der for alle $[X, Y]^T$ gælder $\tau([X, Y]^T) = C[X, Y]^T$.

2 2. Hvad bliver $[1, 1]^T$ transformeret over i?

3 3. Findes der et punkt, som bliver transformeret over i $[\frac{1}{2}, 2, 0]^T$?

3 4. Findes der et punkt, som bliver transformeret over i $[1, 1, 1]^T$?

Opgave 5:(10%) Betragt planet gennem punktet $P = (0, 1, 0)^T$ og med normalvektor $\vec{n} = (2, 0, 2)^T$. Ligger punktet $(0, 2, 0)^T$ i planet? (Husk, at argumentere for dit svar)

Opgave 6:(8%) Punktet P har Cartesiske koordinater $(x, y) = (-1, -1)$. Find de tilhørende polære koordinater.

Opgave 7:(7%) Find determinanten af matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 8:(16 %) Betragt trekanten med hjørner $P_0 = (1, 1, 1)^T$, $P_1 = (4, 4, 7)^T$ og $P_2 = (1, 4, 4)^T$. Punktet $P = (2, 4, 5)^T$ oplyses at ligge i trekanten. Find s og t så $P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0)$ holder.

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst.

Bilag: Her følger opgaverne i en engelsk version

Exercise 1:(20%)

1. Consider rotation around the axis $\vec{r} = (3, 4, 0)^T$ with angle 90°. Find the corresponding rotation matrix

2. To which new point is the point $(6, 8, 0)^T$ being rotated?

3. Consider the affine transformation corresponding to that we first rotate everything as in subquestion 1 above and then translate everything with $(1, 2, 3)^T$. Determine the matrix that describes this affine transformation. Where does the point $(6, 8, 0)^T$ end up?

4. Consider the affine transformation corresponding to that we first translate everything with $(1, 2, 3)^T$ and the rotate everything as in subquestion 1 above. Determine the matrix that describes this affine transformation. Where does the point $(6, 8, 0)^T$ end up?

Exercise 2:(15%)

1. Find the quaternion p that corresponds to rotation around the axis $(1, 0, 1)^T$ with the angle $90°$
2. Find the quaternion q that corresponds to rotation around the axis $(-1, 0, -1)^T$ with the angle $90°$
3. Determine the quaternion product pq.

Exercise 3:(10%) The matrix

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

is a rotationsmatrix. Determine the inverse A^{-1}.

Exercise 4:(14%) Let a linear transformation $\tau : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be given by

$$\begin{aligned} \tau([1, 0]^T) &= [1, 0, 0]^T \\ \tau([0, 1]^T) &= [0, 1, 0]^T \end{aligned}$$

1. Determine a matrix C such that for all $[X, Y]^T$ it holds that $\tau([X, Y]^T) = C[X, Y]^T$.
2. What is $[1, 1]^T$ being transformered to?
3. Does there exists a point that is being transformed to $[\frac{1}{2}, 2, 0]^T$?
4. Does there exists a point that is being transformed to $[1, 1, 1]^T$?

Exercise 5:(10%) Consider the plane through the point $P = (0, 1, 0)^T$ with normal $\vec{n} = (2, 0, 2)^T$. Is the point $(0, 2, 0)^T$ contained in the plane?

Exercise 6:(8%) The point P has Cartesian coordinates $(x, y) = (-1, -1)$. Find the corresponding polar coordinates.

Exercise 7:(7%) Find the determinant of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercise 8:(16 %) Consider the triangle having corners $P_0 = (1, 1, 1)^T$, $P_1 = (4, 4, 7)^T$ and $P_2 = (1, 4, 4)^T$. The point $P = (2, 4, 5)^T$ is contained in the triangle. Find s and t such that $P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0)$ holds.

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst.

Reeks. 12. marts 2009

Opg 1

$$\hat{r} = \frac{(3,4,0)^T}{\sqrt{9+16}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)^T$$

$x = \frac{3}{5}$

$y = \frac{4}{5}$

$z = 0$

$c = \cos(90^\circ) = 0$

$s = \sin(90^\circ) = 1$

$t = 1 - c = 1$

$$R_{\hat{r},\theta} = \begin{bmatrix} 1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 0 & 1\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} - 1\cdot 0 & 1\cdot\frac{3}{5}\cdot 0 + 1\cdot\frac{4}{5} \\ 1\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot 0 & 1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + 0 & 1\cdot\frac{4}{5}\cdot 0 - 1\cdot\frac{3}{5} \\ 1\cdot\frac{3}{5}\cdot 0 - 1\cdot\frac{4}{5} & 1\cdot\frac{4}{5}\cdot 0 + 1\cdot\frac{3}{5} & 1\cdot 0^2 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{20}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{15}{25} \\ -\frac{20}{25} & \frac{15}{25} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 & 20 \\ 12 & 16 & -15 \\ -20 & 15 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 54+96 \\ 72+128 \\ -120+120 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Udregning havde ikke været nødvendig, idet vektoren $(6,8,0)$ er parallel med rotationsaksen, og punktet dermed ej bliver flyttet.

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{20}{25} & 1 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{15}{25} & 2 \\ \frac{-20}{25} & \frac{15}{25} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ roteres over i $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ og translationen giver

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{20}{25} & 0 \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{15}{25} & 0 \\ -\frac{20}{25} & \frac{15}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{20}{25} & \frac{93}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} & -\frac{15}{25} & -\frac{1}{25} \\ -\frac{20}{25} & \frac{15}{25} & 0 & \frac{10}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{243}{25} \\ \frac{199}{25} \\ \frac{10}{25} \\ 1 \end{pmatrix}$$

also $\begin{pmatrix} \frac{243}{25} \\ \frac{199}{25} \\ \frac{10}{25} \end{pmatrix}$

3/8

Opg 2

1) $\hat{r} = \frac{(1,0,1)^T}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

$$p = \cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right) + \sin\left(\frac{90^\circ}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)}}$$

(kunne også skrives

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$
)

2) $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

3) $p \cdot q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \underline{\underline{1 + (0,0,0)}}$$

(De to rotationer ophæver hinanden)

opg 3

Da A er en rotationsmatrice er den inverse lig A^T altså

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

(ikke lig A også)

opg. 4

1)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3) Ja, nemlig $(\frac{1}{2}, 2)^T$

4) Nej, tredie koordinat vil altid ~~vase~~ 0

5/8

opg. 5

Plan gennem $P = (0,1,0)^T$ med normal $\bar{n} = (2,0,2)^T$.

$(x,y,z)^T$ ligger i planet hvis $\left((x,y,z) - (0,1,0)\right) \cdot (2,0,2) = 0$

Test af $(0,2,0)^T$

$(0-0,\ 2-1,\ 0-0) \cdot (2,0,2) = 0$

altså i plan

opg b Cartesiske koordinater $(x,y) = (-1,-1)$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan 2(-1,-1) = 225^\circ$

opg. 7

Rækkerne er lineært afhængige og derfor er determinanten lig 0

opg. 8

$P_0 = (1,1,1)^T \quad P_1 = (4,4,7)^T$

$P_2 = (1,4,4)^T$

$P = (2,4,5)^T$

$\bar{u} = P_1 - P_0 = (3,3,6)^T$

$\bar{v} = P_2 - P_0 = (0,3,3)^T$

$\bar{w} = P - P_0 = (1,3,4)^T$

$$\bar{u} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}^T = (-6,-6,6)^T$$

$$\|\bar{u} \times \bar{w}\| = \sqrt{6^2+6^2+6^2} = \sqrt{108}$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}^T = (-9,-9,9)^T$$

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \sqrt{243}$$

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}^T = (3,3,-3)^T$$

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \sqrt{27}$$

$$s = \frac{\|\bar{v} \times \bar{w}\|}{\|\bar{u} \times \bar{v}\|} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{243}} = \sqrt{\frac{27}{243}} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$t = \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{243}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

<u>Tjek:</u>

$$P_0 + \frac{1}{3}\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} = P$$