Prøve i "Matematik for Computer Grafik"

Medialogiuddannelsen, 5. semester og Spiluddannelsen, 7. semester

Onsdag 7. januar 2009, i tidsrummet 9.00-13.00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
Herunder lommeregnere, men ikke personlige computere og mobiltelefoner.
Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen og at mellemregninger medtages i passende omfang.
De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Opgavesættet indeholder 8 opgaver. Disse listes nedenfor først på dansk og dernæst på engelsk.

Opgave 1:(20%) Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

1. Vis, at $det(A) = 1$ holder og at $AA^T = I$ holder. Konkluder, at A er en rotationsmatrice.
2. Find den tilhørende rotationsvinkel og rotationsakse.
3. Hvad bliver punktet $(1, 0, 1)^T$ roteret over i?
4. Betragt den affine transformation svarende til at vi først udfører ovenstående rotation og dernæst translaterer alting med $(1, 2, 3)^T$. Opskriv matricen, som beskriver denne affine transformation. Hvad bliver punktet $(1, 0, 1)^T$ flyttet over i?

Opgave 2:(13%)

1. Find kvaternionen p, som svarer til rotation omkring aksen $\vec{r} = (0, 2, 0)^T$ med vinklen 180°

2. Betragt kvaternionerne $q = 2 + (1, 1, 0)$ og $t = 1 + (1, 0, 0)$. Beregn qt

Opgave 3:(11%)

I denne opgave arbejdes der med Hermite kurven $Q(u)$, som opfylder

$$\begin{aligned} Q(0) &= P_0 &= (0,0,0)^T \\ Q'(0) &= \vec{P}_0' &= (3,0,0)^T \\ Q(1) &= P_1 &= (0,2,0)^T \\ Q'(1) &= \vec{P}_1' &= (0,8,0)^T \end{aligned}$$

1. Bestem $Q(u)$

2. Find $Q(\frac{1}{2})$

3. Ovenstående Hermite kurve svarer til en (kubisk) Bezier kurve. Find de tilhørende støttepunkter P_0, P_1, P_2, P_3.

Opgave 4:(10%) Betragt matricen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b & 3 \\ a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

1. Bestem $det(B)$
2. For hvilke værdier af a, b, c er determinanten forskellig fra 0?
3. For hvilke værdier af a, b, c er rækkerne i B lineært afhængige?

Opgave 5:(7%) Betragt planet gennem origo og med normalvektor $\vec{n} = (1, 0, 0)^T$. Lad en shear omkring denne plan være givet ved shearvektoren (forskydningsvektoren) $\vec{s} = (0, 1, 0)^T$. Find den tilhørende matrice.

Opgave 6:(9%) Betragt planet gennem punktet $P = (2, 0, 0)^T$ og med normalvektor $\vec{n} = (1, 0, 0)^T$. Lad en shear omkring denne plan være givet ved shearvektoren (forskydningsvektoren) $\vec{s} = (0, 1, 0)^T$. Find den tilhørende matrice.

Opgave 7:(10%) Lad en lineær transformation $\tau : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ være givet ved

$$\begin{aligned}
\tau([1,0,0]^T) &= [1,0,1]^T \\
\tau([0,1,0]^T) &= [1,0,1]^T \\
\tau([0,0,1]^T) &= [0,0,0]^T
\end{aligned}$$

1. Bestem en matrix C så der for alle $[X,Y,Z]^T$ gælder $\tau([X,Y,Z]^T) = C[X,Y,Z]^T$.
2. Hvad bliver $[1,1,1]^T$ transformeret over i?
3. Hvad bliver $[1,1,0]^T$ transformeret over i?

Opgave 8:(20%) Betragt trekanten med hjørner $P_0 = (0,0,0)^T$, $P_1 = (2,0,2)^T$ og $P_2 = (0,4,2)^T$. Punktet $P = (1,2,2)^T$ oplyses at ligge i trekanten.

1. Find s og t så $P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0)$ holder.
2. Find de Barycentriske koordinater for P (med hensyn til det affine rum udspændt af P_0, P_1 og P_2)

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst.

Opg 1 Eks. 7. jan. 2009 dew

1)

$$\det(A) = -\frac{1}{9}\left(\frac{7}{81} - \frac{16}{81}\right) - \frac{8}{9}\left(-\frac{56}{81} - \frac{16}{81}\right)$$

$$+ \frac{4}{9}\left(\frac{32}{81} + \frac{4}{81}\right)$$

$$= \frac{9 + 576 + 144}{729} = 1$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+64+16}{81} & \frac{-8-8+16}{81} & \frac{-4+32-28}{81} \\ \frac{-8-8+16}{81} & \frac{64+1+16}{81} & \frac{32-4-28}{81} \\ \frac{-4+32-28}{81} & \frac{32-4-28}{81} & \frac{16+16+49}{81} \end{bmatrix} = I$$

Da $\det(A) = 1$ og $AA^T = I$ er A en rotationsmatrice

2)

$$Tr(A) = -1$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(Tr(A) - 1)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}(-2)\right)$$

$$= \arccos(-1) = \underline{\underline{180^\circ}}$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{R_{00} - R_{11} - R_{22} + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{7}{9} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{R_{01}}{2x} = \frac{\frac{8}{9}}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 9} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{R_{02}}{2x} = \frac{\frac{4}{9}}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\hat{r} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

3)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{9} \\ \frac{12}{9} \\ -\frac{3}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

4)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 2 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

2/9

Olaw

Opgave 2

1) $p = \cos\left(\frac{180}{2}\right) + \sin\left(\frac{180}{2}\right) \frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|}$

$= 0 + 1 \cdot (0,1,0) = \underline{\underline{0 + (0,1,0)}}$

2) $q = 2 + (1,1,0) \quad t = 1 + (1,0,0)$

$qt = 2 - (1,1,0)\cdot(1,0,0) + (1,1,0) + 2(1,0,0)$

$+ \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2 - 1 + (3,1,0) + (0,0,-1)$

$= \underline{\underline{1 + (3,1,-1)}}$

3/7

Opgave 3

$$Q(0) = (0,0,0)^T$$
$$Q'(0) = (3,0,0)^T$$
$$Q(1) = (0,2,0)^T$$
$$Q'(1) = (0,8,0)^T$$

1) $$\underline{\underline{Q(u) = (2u^3 - 3u^2 + 1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + (-2u^3 + 3u^2)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}}}$$
$$\underline{\underline{+ (u^3 - 2u^2 + u)\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + (u^3 - u^2)\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}}}$$

2) $$Q(\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{4} + 3\tfrac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$
$$+ \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \left(\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3/8\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}3/8\\0\\0\end{pmatrix}}}$$

Olaw

3)

$$P_0 = \underline{\underline{(0,0,0)^T}}$$

$$P_3 = \underline{\underline{(0,2,0)^T}}$$

$$3(P_1 - P_0) = (3,0,0)^T$$

$$\Updownarrow$$

$$3P_1 = \bar{0}^T + (3,0,0)^T$$

$$\Updownarrow$$

$$P_1 = \underline{\underline{(1,0,0)^T}}$$

$$3(P_3 - P_2) = (0,8,0)^T$$

$$\Updownarrow$$

$$3((0,2,0)^T - P_2) = (0,8,0)^T$$

$$\Updownarrow$$

$$-3P_2 = (0,2,0)^T$$

$$\Updownarrow$$

$$P_2 = = \underline{\underline{(0,-\tfrac{2}{3},0)^T}}$$

5/9

opg. 4

1) $\det(B) = a(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b & 3 \\ 0 & c \end{vmatrix} = \underline{\underline{-abc}}$

2) Det. $\neq 0$ for $a \neq 0$, $b \neq 0$ og $c \neq 0$

3) lineær afhængighed når mindst en af værdierne a, b, c er lig nul.

opg 5 $\hat{n} = (1,0,0) = \bar{n}$

$\bar{S} \otimes \hat{n}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1,0,0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I + \bar{S} \otimes \hat{n} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Eller

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Olaw

Opg 6

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = I + \bar{s} \otimes \hat{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & (I-A)\bar{x} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)\bar{x}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7/9

opg 7

1)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ $T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

2) $$C\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$$

3) $$C\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$$

opg 8 $P_0 = (0,0,0)$ $P_1 = (2,0,2)$ $P_2 = (0,4,2)$

$P = (1,2,2)$

1) Formlerne side 85 benyttes

$\bar{u} = P_1 - P_0 = (2,0,2)$

$\bar{v} = P_2 - P_0 = (0,4,2)$

$\bar{w} = P - P_0 = (1,2,2)$

Olaw

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4, 2, -4)$$

$$\|\bar{v} \times \bar{w}\| = \sqrt{16+4+16} = 6$$

$$\bar{u} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -2, 4)$$

$$\|\bar{u} \times \bar{w}\| = \sqrt{16+4+16} = 6$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8, -4, 8)$$

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \sqrt{64+16+64} = \sqrt{144} = 12$$

$$s = \frac{\|\bar{v} \times \bar{w}\|}{\|\bar{u} \times \bar{v}\|} = \frac{6}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$t = \frac{\|\bar{u} \times \bar{w}\|}{\|\bar{u} \times \bar{v}\|} = \frac{6}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Alternativt kan s og t findes fra $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$

2) De Barycentrische koordinater for P er

$$(a_0, a_1, a_2) = (1-s-t, s, t)$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)}}$$

9/9 Alternativt kan svaret $\underline{(a_1, a_2) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}$ accepteres