Diagonalisering af matricer

Lad A være en $n \times n$ matrix.
A siges at være diagonaliserbar hvis der findes en invertibel matrix P og en diagonalmatrix D så

$$A = PDP^{-1}.$$

A er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes en basis for $\mathbb{R}^n$, der består af egenvektorer for A.

Hvis $\mathbb{R}^n$ har en basis $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ af egenvektorer, hvor $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$
så kan P vælges som

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{p}_n]$$

og D er diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen.

Det er vigtigt at rækkefølgen af søjler i P svarer til rækkefølgen af egenværdier på diagonalen af D.

Diagonaliseringsalgoritme.
A: en $n \times n$ matrix.

Bestem det karakteristiske polynomium for A, og skriv

$$\det(A - xI_n) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k} g(x),$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har nogen (reelle) rødder.

Hvis graden af $g(x)$ er mindst 2 og dermed $m_1 + m_2 + \ldots + m_k < n$ så er A ikke diagonaliserbar.

Hvis $g(x) = \pm 1$ og dermed $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$:
For hver egenværdi λ_i:
find en basis for egenrummet Null $(A - \lambda_i I)$.

Hvis for en af disse egenværdier $\dim \text{Null}\,(A - \lambda_i I) < m_i$ så er A ikke diagonaliserbar.

Ellers:

sæt alle baser for egenrum sammen i en mængde $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$, som er basis for $\mathbb{R}^n$.
Lad $P = [\mathbf{p}_1 \ \ldots \ \mathbf{p}_n]$ og lad

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

være den diagonalmatrix der har egenværdierne for A på diagonalen, sådan at $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Så er

$$A = PDP^{-1}.$$

Anvendelse af diagonalisering.

Hvis $A = PDP^{-1}$ hvor D er diagonalmatricen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

så er

$$A^m = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{bmatrix} P^{-1},$$

for ethvert positivt helt tal m.