MCG - 7

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

$\tilde{A}_{ij}$: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved fjerne række i og søjle j.

Determinant.
$n = 1$: $\quad \det([a_{00}]) = a_{00}$

$n \geq 2$:
$$\det(A) = a_{00} \det(\tilde{A}_{00}) - a_{01} \det(\tilde{A}_{01}) + a_{02} \det(\tilde{A}_{02}) - \ldots + (-1)^{n-1} a_{0,n-1} \det(\tilde{A}_{0,n-1})$$

Udvikling efter række i:

$$\det(A) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Udvikling efter søjle j:

$$\det(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Egenskaber for determinanter:

$$\det(A^T) = \det(A), \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Elementære rækkeoperationer på determinanter.

Matricen B fås fra A ved at udføre en af disse rækkeoperationer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
   $\det(B) = k\det(A)$ altså $\det(A) = \frac{1}{k}\det(B)$.

2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
   determinanten er uændret: $\det(B) = \det(A)$.

3. ombyt to rækker.
   determinanten skifter fortegn: $\det(B) = -\det(A)$.

Invers matrix.
En $n \times n$ matrix A har invers matrix A^{-1} hvis

$$AA^{-1} = I, \quad A^{-1}A = I.$$

(Hvis én af disse ligninger opfyldt så er de begge.)

A har en invers hvis og kun hvis det(A) $\neq 0$.

Hvis $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ kan omskrives med rækkeoperationer til $\begin{bmatrix} I & B \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = B$.

Hvis $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ ikke kan omskrives med rækkeoperationer til en matrix på formen $\begin{bmatrix} I & B \end{bmatrix}$ så har A ikke en invers.

Hvis A og B er $n \times n$ matricer der begge har en invers så har AB en invers:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Invers af specielle matricer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hvis a, b og c er forskellige fra 0 så er

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

Invers af 2×2 matrix:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

forudsat at $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

En $n \times n$ matrix siges at være en ortogonal matrix hvis dens søjle-vektorer er parvis ortogonale og de har længde 1.

Hvis A er en ortogonal matrix så er $A^{-1} = A^T$.
Omvendt, hvis $A^{-1} = A^T$ så er A en ortogonal matrix.