MCG - 10

Spejling (reflektion) om plan gennem $O = (0,0,0)$ med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$, der har længde 1.

3×3 matricen for spejlingen:

$$\mathbf{I} - 2(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) = \begin{bmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_xn_y & -2n_xn_z \\ -2n_xn_y & 1-2n_y^2 & -2n_yn_z \\ -2n_xn_z & -2n_yn_z & 1-2n_z^2 \end{bmatrix},$$

hvor $\hat{\mathbf{n}} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$.
Den affine matrix er

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - 2(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Spejling om O har 3×3 matrix $-\mathbf{I}$.

En ortogonal matrix har determinant 1 eller -1.

En matrix A er en ortogonal matrix med determinant 1
hvis og kun hvis
A er matricen for en rotation.

Matricen for spejling er en ortogonal matrix med determinant -1.
Men spejlings-matricer udgør kun en lille andel af alle ortogonal matricer med determinant -1

Shear.
$\hat{\mathbf{n}}$: en vektor, der har længde 1.
$\mathbf{s}$ en vektor ortogonal på $\hat{\mathbf{n}}$.

Punkter i planen gennem O med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ fastholdes af transformationen.
En vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ afbildes i $\mathbf{v} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{s}$.
Den affine matrix for shear er

$$H_{\hat{\mathbf{n}},\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} s_x n_x & s_x n_y & s_x n_z \\ s_y n_x & s_y n_y & s_y n_z \\ s_z n_x & s_z n_y & s_z n_z \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ og $\hat{\mathbf{n}} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$.

$\mathbf{R}$ er 3×3 matricen for en rotation om O eller shear eller spejling om plan gennem O.

Den tilsvarende transformation om $C = O + \mathbf{x}$ har affin matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{x} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{x} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{R}$: 3×3 matricen for en rotation.

Find **Euler vinkler** $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ så

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z$$

hvor
$\mathbf{R}_x$ er rotation om x-aksen med vinklen θ_x
$\mathbf{R}_y$ er rotation om y-aksen med vinklen θ_y
$\mathbf{R}_z$ er rotation om z-aksen med vinklen θ_z.

Vinklen θ_y bestemmes ved:

$$\sin\theta_y = \mathbf{R}_{02}, \quad \cos\theta_y = \sqrt{1 - \sin^2\theta_y}.$$

Hvis $\cos\theta_y \neq 0$ så bestemmes θ_x og θ_z ved

$$\sin\theta_x = -\frac{\mathbf{R}_{12}}{\cos\theta_y}, \quad \cos\theta_x = \frac{\mathbf{R}_{22}}{\cos\theta_y},$$

$$\sin\theta_z = -\frac{\mathbf{R}_{01}}{\cos\theta_y}, \quad \cos\theta_z = \frac{\mathbf{R}_{00}}{\cos\theta_y}.$$

Hvis $\cos\theta_y = 0$ så vælg $\theta_z = 0$ og θ_x bestemmes ved

$$\sin\theta_x = \mathbf{R}_{21}, \quad \cos\theta_x = \mathbf{R}_{11}.$$