MCG - 14

Hermite kurver:

Vi søger en kurve $Q(u)$.
$t_0 < t_1$ er tal (tider).
P_0 og P_1 er punkter. Vi ønsker: $Q(t_0) = P_0$ og $Q(t_1) = P_1$.
$\mathbf{P}'_0$ og $\mathbf{P}'_1$ er vektorer. Vi ønsker: $\mathbf{Q}'(t_0) = \mathbf{P}'_0$ og $\mathbf{Q}'(t_1) = \mathbf{P}'_1$.

Hvis $t_0 = 0$ og $t_1 = 1$ så kan $Q(u)$ beregnes fra formlen:

$$Q(u) = UMG,$$

hvor

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \mathbf{P}'_0 \\ \mathbf{P}'_1 \end{bmatrix}.$$

G er egentlig en 4×3 matrix hvor rækkerne er punkter/vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Hvis $t_0 = 0$ men $t_1 \neq 1$ så erstattes U og G med

$$U = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{t_1^3} & \frac{t^2}{t_1^2} & \frac{t}{t_1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad G = \begin{bmatrix} P_0 \\ \\ P_1 \\ \\ \frac{1}{t_1}\mathbf{P}_0' \\ \\ \frac{1}{t_1}\mathbf{P}_1' \end{bmatrix}.$$

Så er $Q(t) = UMG$.

Bézier kurver:
$P_0, P_1, \ldots, P_n$ er punkter, kaldet kontrolpunkter.
Bézier kurven

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} P_i, \quad \text{hvor} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

opfylder at $Q(0) = P_0$ og $Q(1) = P_n$.

Mest interessant er $n = 3$:

$$Q(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3.$$

Da $(1-u)^3 + 3u(1-u)^2 + 3u^2(1-u) + u^3 = 1$ er $Q(u)$ en affin kombination af P_0, P_1, P_2, P_3.

Desuden er $(1-u)^3 \geq 0$, $3u(1-u)^2 \geq 0$, $3u^2(1-u) \geq 0$ og $u^3 \geq 0$.
Derfor er $Q(u)$ en konveks kombination af P_0, P_1, P_2, P_3.

$$J_{3,0}(u) = (1-u)^3 = 1 - 3u + 3u^2 - u^3$$

$$J_{3,1}(u) = 3u(1-u)^2 = 3u - 6u^2 + 3u^3$$

$$J_{3,2}(u) = 3u^2(1-u) = 3u^2 - 3u^3$$

$$J_{3,3}(u) = u^3$$