MCG - 2

Regneoperationer der kan bruges på vektorer:

Vektoraddition: hvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er vektorer så er $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ en vektor.

$$(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) + (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) = (v_0+w_0, v_1+w_1, \ldots, v_{n-1}+w_{n-1}).$$

Skalarmultiplikation: hvis $\mathbf{v}$ er en vektor og a er et tal (skalar) så er $a\mathbf{v}$ en vektor.

$$a(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = (av_0, av_1, \ldots, av_{n-1}).$$

Alle sædvanlige regneregler gælder for disse regneoperationer.
F.eks. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ og $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Hvis $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$ er vektorer og $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ er tal så kaldes udtrykket

$$a_0\mathbf{v_0} + a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{v_{n-1}}$$

en linear kombination af $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$.

Mængden af vektorer der kan skrives som linear kombination af $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$ kaldes mængden (underrummet) udspændt af $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$.

Hvis én af de n vektorer $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$ kan skrives som linear kombination af de andre $n-1$ vektorer så siges vektorerne at være lineært afhængige. Ellers er de lineært uafhængige.

Prikproduktet af to vektorer $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ og $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$ er defineret ved

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_0 w_0 + v_1 w_1 + \ldots + v_{n-1} w_{n-1}.$$

Prikproduktet kan også beregnes som

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}|| \; ||\mathbf{w}|| \cos\theta$$

hvor θ er vinklen mellem vektorerne.

$\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale hvis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Længden af $\mathbf{v}$ er $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_{n-1}^2}$.

Prikproduktet opfylder følgende regneregler:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- $a(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (a\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (a\mathbf{w})$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ og
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ hvis og kun hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Længde af vektorer opfylder

- $||\mathbf{v}|| \geq 0$ og $||\mathbf{v}|| = 0$ hvis og kun hvis $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- $||a\mathbf{v}|| = |a| \; ||\mathbf{v}||$
- $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$.

Disse regler opfyldes også af Manhattan normen

$$||\mathbf{v}||_{\ell_1} = |v_0| + |v_1| + \ldots + |v_{n-1}|$$

hvor $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Normalisering af en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}.$$

$\hat{\mathbf{v}}$ har samme retning $\mathbf{v}$ og længde 1.

Projektionen af en vektor $\mathbf{v}$ på en vektor $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ er

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{w}||^2}\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{w}})\hat{\mathbf{w}}.$$

Vektoren

$$\mathrm{perp}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$$

er ortogonal på $\mathbf{w}$.

En mængde af vektorer $\{\mathbf{w_0}, \mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_{n-1}}\}$ siges at være ortonormal hvis vektorerne er parvis ortogonale og de har længde 1.

Gram-Schmidt ortogonalisering af lineært uafhængige vektorer $\mathbf{v_0}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_{n-1}}$:

Sæt

- $\mathbf{w_0} = \mathbf{v_0}$
- $\mathbf{w_1} = \mathbf{v_1} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_0}}\mathbf{v_1}$
- $\mathbf{w_2} = \mathbf{v_2} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_0}}\mathbf{v_2} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_1}}\mathbf{v_2}$
- $\ldots$

Generelt:

$$\mathbf{w_i} = \mathbf{v_i} - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_0}}\mathbf{v_i} - \ldots - \mathrm{proj}_{\mathbf{w_{i-1}}}\mathbf{v_i}.$$

Beregn dernæst

$$\hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{1}}, \ldots, \hat{\mathbf{w}}_{\mathbf{n-1}}.$$

Disse vektorer er ortonormale.

MCG - 3

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$: tre lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Lad højre hånds pegefinger pege i retning $\mathbf{u}$ og langefingeren pege i retning $\mathbf{v}$. Så siger vi at $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er højrehåndet hvis $\mathbf{w}$ er på samme side af planen udspændt af $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ som tommelfingeren. Ellers er $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ venstrehåndet.

Eksempel: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ er højrehåndet.

Lad $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ og $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$.

Så er krydsproduktet defineret ved

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_y w_z - w_y v_z, v_z w_x - w_z v_x, v_x w_y - w_x v_y).$$

$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ er vektoren ortogonal på $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, der opfylder at

- $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ er højrehåndet, og
- $||\mathbf{v} \times \mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}|| \sin\theta$, hvor θ er vinklen mellem $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

$||\mathbf{v} \times \mathbf{w}||$ er arealet af et parallelogram hvor to af siderne er $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

Vektor tripelprodukt:

Hvis $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er to vektorer i $\mathbb{R}^3$ (ikke-parallelle) så er

$$\mathbf{w},\ \ \mathbf{v} \times \mathbf{w},\ \ \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

en højrehåndet ortogonal basis.
(Alternativ til Gram-Schmidt.)

Skalar tripelprodukt:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w} \times \mathbf{u})$$

er et tal som er

- positivt hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er højrehåndet,
- negativt hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er venstrehåndet,
- 0 hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er lineært afhængige.

$|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ er volumen (rumfang) af et parallelepipedum hvor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ er tre af kanterne.

Hvis V er en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$ som opfylder

- $\mathbf{v} \in V$ og $\mathbf{w} \in V \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$.
- $\mathbf{v} \in V$ og $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\mathbf{v} \in V$.

så siger vi at V er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Hvis $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d$ er lineært uafhængige vektorer der udspænder V så siger vi at $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_d\}$ er en basis for V. d er da dimensionen af V.

Underrum af dimension 0: $\{\mathbf{0}\}$
Underrum af dimension 1: linie gennem $\mathbf{0}$.
Underrum af dimension 2: plan gennem $\mathbf{0}$.

Affin rum af dimension 1: linie (ikke gennem $\{\mathbf{0}\}$).
Affin rum af dimension 2: plan (ikke gennem $\{\mathbf{0}\}$).

Et affint rum består af punkter på formen

$$P + \mathbf{v}, \quad P \in V,$$

hvor V er et underrum og $\mathbf{v}$ er en fast vektor.

P_0 og P_1: to forskellige punkter.
Der findes en entydig linie der går gennem begge punkter. Den består punkter på formen

$$tP_0 + (1-t)P_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Liniestykket mellem P_0 og P_1 består af punkterne

$$tP_0 + (1-t)P_1, \quad \text{hvor } 0 \le t \le 1.$$

En mængde siges at være konveks hvis det for ethvert par af punkter P_0, P_1 i mængden gælder at liniestykket mellem dem også er indeholdt i mængden.

Lad $P_0, \ldots, P_k$ være punkter.
Udtrykket

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_k P_k, \quad \text{hvor } a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 1$$

kaldes en affin kombination af $P_0, \ldots, P_k$.

Mængden af punkter der kan skrives som affin kombination af $P_0, \ldots P_k$ er et affint rum.

$P_0, \ldots P_k$ siges at være affint afhængige hvis ét af punkter kan skrives som affin kombination af de andre k punkter.
Ellers er $P_0, \ldots, P_k$ affint uafhængige.

W: et affint underrum.
Hvis ethvert punkt i W er affin kombination af $P_0, \ldots, P_k$ og disse punkter er affint uafhængige så siges $P_0, \ldots, P_k$ at udgøre et simplex.

Ethvert punkt P i W kan da skrives (entydigt) som

$$a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_k P_k, \quad \text{hvor } a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 1.$$

$a_0, a_1, \ldots, a_k$ kaldes de barycentriske koordinater for P.

MCG - 4

De polære koordinater for et punkt $P = (x, y)$ i planen er (r, θ) hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er afstanden mellem $(0, 0)$ og (x, y) og θ er vinklen (regnet med fortegn) mellem x-aksen og vektoren (x, y).

Omregning fra (r, θ) til (x, y):

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Omregning fra (x, y) til (r, θ):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{hvis } x > 0, \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{hvis } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{hvis } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{hvis } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Hvis man regner i grader skal π erstattes af $180°$.

De sfæriske koordinater for et punkt $P = (x, y, z)$ i rummet er (ρ, ϕ, θ) hvor $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ er afstanden mellem $(0, 0, 0)$ og (x, y, z) og ϕ er vinklen mellem z-aksen og vektoren (x, y, z). $0 \leq \phi \leq \pi$ (eller $0 \leq \phi \leq 180^\circ$). θ er den samme vinkel som ved polære koordinater for (x, y).

Omregning fra (ρ, ϕ, θ) til (x, y, z):

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\phi.$$

Omregning fra (x, y, z) til (ρ, ϕ, θ):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \arccos \frac{z}{\rho}.$$

θ beregnes som på forrige side.

En linie der går gennem punkter P_0 og P_1 består af punkter der kan skrives som

$$P_0 + t\mathbf{d}, \quad t \in \mathbb{R},$$

hvor $\mathbf{d} = P_1 - P_0$ er vektoren fra P_0 til P_1.

Hvis linien ligger i planen så findes der vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ (f.eks. hvis $\mathbf{d} = (b, -a)$) som er vinkelret på linien.

Et punkt $Q = (x, y)$ ligger så på linien hvis og kun hvis

$$\mathbf{n} \cdot (Q - P_0) = 0.$$

Hvis $P_0 = (x_0, y_0)$ så kan denne ligning kan omskrives til

$$ax + by + c = 0,$$

hvor $c = -ax_0 - by_0$. Dette kaldes generaliseret linies ligning.

Hvis $||\mathbf{n}|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ og $ax + by + c = d$ så ligger punktet (x, y) i afstand $|d|$ fra linie – hvis $d > 0$ på samme side af linien som $\mathbf{n}$ angiver.

En plan der går gennem punkterne P_0, P_1, P_2 består af punkter på formen

$$P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

hvor $\mathbf{u} = P_1 - P_0$ og $\mathbf{v} = P_2 - P_0$.

Hvis planen ligger i $\mathbb{R}^3$ så findes der en vektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (f.eks. $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$) der er vinkelret på planen.

Et punkt $Q = (x, y, z)$ ligger så på planen hvis og kun hvis

$$\mathbf{n} \cdot (Q - P_0) = 0.$$

Hvis $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ så kan denne ligning omskrives til

$$ax + by + cz + d = 0,$$

hvor $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Dette kaldes generaliseret planens ligning.

Hvis $||\mathbf{n}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$ og (x, y, z) er et vilkårligt punkt i rummet så er $|ax + by + cz + d|$ afstanden mellem punktet og linien – hvis $ax + by + cz + d > 0$ ligger punktet på samme side af planen som $\mathbf{n}$ angiver.

Lad P være et punkt i planen der går gennem P_0, P_1, P_2.
Så findes der entydige tal s, t så

$$P = P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad \text{hvor } \mathbf{u} = P_1 - P_0 \text{ og } \mathbf{v} = P_2 - P_0.$$

Hvis $\mathbf{w} = P - P_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ så kan s og t bestemmes fra ligningerne

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = s(\mathbf{v} \times \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Så er

$$P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0) = (1 - s - t)P_0 + sP_1 + tP_2.$$

De barycentriske koordinater for P er altså $(1 - s - t, s, t)$.

Hvis P ligger inde i trekanten så er $1 - s - t \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$.
Hvis et af tallene er negativ så ligger P udenfor trekanten.

MCG - 5

En 3×5 matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

En $m \times n$ matrix har m rækker (vandrette), og n søjler (lodrette).
Rækkerne numereres $0, 1, \ldots, m-1$.
Søjlerne numereres $0, 1, \ldots, n-1$.

Elementet (tallet) i række i, søjle j skrives $(A)_{ij}$ eller a_{ij}.
F.eks. $(A)_{12} = 7$.

Hvis A og B er $m \times n$ matricer så er $A + B$ $m \times n$ matricen hvor $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$.

Hvis A er en $m \times n$ matrix og $a \in \mathbb{R}$ er et tal så er aA $m \times n$ matricen hvor $(aA)_{ij} = a(A)_{ij}$.

A en $m \times n$ matrix.
B en $r \times s$ matrix.

Produktet AB kan udregnes hvis $n = r$
og resultatet er så en $m \times s$ matrix.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Regneregler, f.eks:

$$A(B + C) = AB + AC$$

og

$$A(aB) = a(AB),$$

hvor a er et tal og A, B, C er matricer der har størrelser sådan at addition og multiplikation er defineret.

Næsten alle sædvanlige regneregler er opfyldt.
Undtagelsen er at multiplikation ikke er kommutativ.

$$AB \neq BA.$$

Den transponerede af en $m \times n$ matrix A er en $n \times m$ matrix A^T hvor $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Hvis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

så er

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Identitetsmatrix / Enhedsmatrix:

$$I = I_n = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvis A er en $m \times n$ matrix så er $AI_n = A$ og $I_m A = A$.

En $n \times 1$ matrix er en (søjle-) vektor.

En $1 \times n$ matrix er en (række-) vektor. Dette opfattes som en transponeret søjle-vektor.

Produkt af blokmatricer (hvis alle summer og produkter er defineret):

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \dots & \mathbf{a}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = b_0 \mathbf{a}_0 + \ldots + b_{n-1} \mathbf{a}_{n-1}.$$

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \dots & \mathbf{b}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_0 & \dots & A\mathbf{b}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Lad V og W være vektorrum, f. eks. $V = \mathbb{R}^m$ og $W = \mathbb{R}^n$.

En funktion $T : V \mapsto W$ siges at være en lineær transformation hvis

- $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$ for alle vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, og

- $T(a\mathbf{v}) = aT(\mathbf{v})$ for alle vektorer $\mathbf{v} \in V$ og alle tal a.

MCG - 6

Hvis A er en $m \times n$ matrix så er funktionen

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

som er defineret ved

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

en lineær transformation.

Hvis $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er lineær transformation, der opfylder

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = \mathbf{a}_0,\ \mathcal{T}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathcal{T}(\mathbf{e}_{n-1}) = \mathbf{a}_{n-1},$$

hvor

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så er

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},$$

hvor A er matricen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0\ \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Hvis $\mathcal{S} : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$ som er defineret ved $\mathcal{S}(\mathbf{w}) = A\mathbf{w}$

og $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ som er defineret ved $\mathcal{T}(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$

er lineære transformationer,
så er

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

også en lineær transformation og

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})(\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v}.$$

Hvis $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er en lineær transformation så definerer vi nulrummet af $\mathcal{T}$ som

$$N(\mathcal{T}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Dette er et underrum af $\mathbb{R}^n$.
Dimensionen af $N(\mathcal{T})$ betegnes *nullity*$(\mathcal{T})$.

Billedrummet af $\mathcal{T}$ defineres som

$$R(\mathcal{T}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m \mid \text{der findes } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ så } \mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$

Dette er et underrum af $\mathbb{R}^m$.
Dimensionen af $R(\mathcal{T})$ kaldes rangen af $\mathcal{T}$ og skrives *rank*$(\mathcal{T})$.

Dimensionsformel:

$$\textit{nullity}(\mathcal{T}) + \textit{rank}(\mathcal{T}) = n.$$

Ligningssytemet

$$
\begin{array}{rcl}
a_{00}x_0 + & a_{01}x_1 + \ldots + a_{0,n-1}x_{n-1} = & b_0 \\
a_{10}x_0 + & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} = & b_1 \\
\vdots & & \\
a_{m-1,0}x_0 + & a_{m-1,1}x_1 + \ldots + a_{m-1,n-1}x_{n-1} = & b_{m-1}
\end{array}
$$

har udvidet koefficientmatrix (totalmatrix)

$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} & b_0 \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m-1,0} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n-1} & b_{m-1}
\end{bmatrix}
$$

Elementære rækkeoperationer på matricer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
3. ombyt to rækker.

To $m \times n$ matricer siges at være rækkeækvivalente hvis den ene kan fås fra den anden ved brug af et antal elementære rækkeoperationer.

To lineære ligningssystemer hvis udvidede koefficientmatricer er rækkeækvivalente har samme løsningsmængde.

En matrix er på trappeform hvis

1. rækker hvor der kun er 0'er står nederst

2. det første element i en række som er $\neq 0$ er 1 (kaldes det ledende element eller pivot)

3. et ledende element i en række står i en søjle til højre for det ledende element i rækken over.

En matrix på trappeform er på reduceret trappeform hvis

4. en søjle med et ledende element (pivot) har 0 i alle andre rækker.

Løsning af lineært ligningssystem (når den udvidede koefficient matrix er på reduceret trappeform)

Hvis sidste søjle har en pivot så er der en ligning på formen:

$$0x_0 + \ldots + 0x_{n-1} = 1,$$

og ligningssystemet er dermed inkonsistent (ingen løsninger).

Hvis der er pivotposition i alle søjler undtagen den sidste så er der en entydig løsning til ligningssystemet.

Hvis der ikke er pivotposition i sidste søjle og der ikke er pivotposition i yderligere mindst én søjle, så er der uendeligt mange løsninger.

MCG - 7

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

$\tilde{A}_{ij}$: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved fjerne række i og søjle j.

Determinant.
$n = 1$: $\quad \det([a_{00}]) = a_{00}$

$n \geq 2$:

$$\det(A) = a_{00} \det(\tilde{A}_{00}) - a_{01} \det(\tilde{A}_{01}) + a_{02} \det(\tilde{A}_{02}) - \ldots + (-1)^{n-1} a_{0,n-1} \det(\tilde{A}_{0,n-1})$$

Udvikling efter række i:

$$\det(A) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Udvikling efter søjle j:

$$\det(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Egenskaber for determinanter:

$$\det(A^T) = \det(A), \qquad \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Elementære rækkeoperationer på determinanter.

Matricen B fås fra A ved at udføre en af disse rækkeoperationer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
   $\det(B) = k\det(A)$ altså $\det(A) = \frac{1}{k}\det(B)$.

2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
   determinanten er uændret: $\det(B) = \det(A)$.

3. ombyt to rækker.
   determinanten skifter fortegn: $\det(B) = -\det(A)$.

Invers matrix.
En $n \times n$ matrix A har invers matrix A^{-1} hvis

$$AA^{-1} = I, \quad A^{-1}A = I.$$

(Hvis én af disse ligninger opfyldt så er de begge.)

A har en invers hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$.

Hvis $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ kan omskrives med rækkeoperationer til $\begin{bmatrix} I & B \end{bmatrix}$ så er $A^{-1} = B$.

Hvis $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ ikke kan omskrives med rækkeoperationer til en matrix på formen $\begin{bmatrix} I & B \end{bmatrix}$ så har A ikke en invers.

Hvis A og B er $n \times n$ matricer der begge har en invers så har AB en invers:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Invers af specielle matricer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hvis a, b og c er forskellige fra 0 så er

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

Invers af 2×2 matrix:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

forudsat at $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$.

En $n \times n$ matrix siges at være en ortogonal matrix hvis dens søjle-vektorer er parvis ortogonale og de har længde 1.

Hvis A er en ortogonal matrix så er $A^{-1} = A^T$.
Omvendt, hvis $A^{-1} = A^T$ så er A en ortogonal matrix.

MCG - 8

En **affin transformation** $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er en funktion der opfylder

$$\mathcal{T}(a_0 P_0 + a_1 P_1) = a_0 \mathcal{T}(P_0) + a_1 \mathcal{T}(P_1),$$

for alle punkter P_0, P_1 og alle tal a_0, a_1 hvor $a_0 + a_1 = 1$.

Lad $\mathcal{T}$ være en affin transformation.
Sæt $\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \mathcal{T}(O + \mathbf{v}) - \mathcal{T}(O)$, hvor $O = (0, \ldots, 0)$.
Så er $\mathcal{S}$ en lineær transformation og der findes derfor en matrix A så $\mathcal{S}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

A's søjler er $\mathcal{S}(\mathbf{e}_0), \ldots \mathcal{S}(\mathbf{e}_{n-1})$.

(side 138)

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{y},$$

hvor $\mathbf{y} = \mathcal{T}(O)$.

Den affine transformation repræsenteres af følgende matrix

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{y} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Den inverse affine transformation $\mathcal{T}^{-1}$ repr¡E6¿senteres af den inverse matrix

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Punktet P i $\mathbb{R}^n$ repræsenteres af følgende vektor i $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En **translation** med vektoren $\mathbf{t}$ afbilder punktet P i punktet $P + \mathbf{t}$.

Matrix

$$\begin{bmatrix} I_n & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Ren **rotation**. (ren $=$ om akse gennem O; dermed er rotationen en lineær transformation)

En lineær transformation $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ er rotation
hvis og kun hvis
A er en ortogonal matrix med $\det(A) = 1$.

En sammensætning af to rotationer er en rotation.

Rotation i $\mathbb{R}^3$ om z-aksen med vinkel θ har matrix

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den affine matrix er

$$\begin{bmatrix} R_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

MCG - 9

Rotation i $\mathbb{R}^3$ med vinkel θ om akse med retningsvektor $\mathbf{r}$.
Hvis højre hånds tommelfinger peger i retning $\mathbf{r}$ så peger de andre fingre i positive omløbsretning.

Rotation med vinkel $-\theta$ om akse med retningsvektor $-\mathbf{r}$ er den samme rotation som rotation med vinkel θ om akse med retningsvektor $\mathbf{r}$.

Udregn $\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{||\mathbf{r}||}\mathbf{r}$.

En vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ roteres over i vektoren $R(\mathbf{v})$, som kan beregnes med Rodrigues formel:

$$R(\mathbf{v}) = \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + \sin(\theta)(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}).$$

Hvis $\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ så er matricen for rotationen:

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta} = (1-\cos(\theta) \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix} + \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Matricen kan også skrives som

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta} = \begin{bmatrix} tx^2 + c & txy - sz & txz + sy \\ txy + sz & ty^2 + c & tyz - sx \\ txz - sy & tyz + sx & tz^2 + c \end{bmatrix},$$

hvor

$$c = \cos(\theta), \quad s = \sin(\theta), \quad t = 1 - \cos(\theta).$$

Rotation om x-aksen med vinkel θ_x [indsæt $(x, y, z) = (1, 0, 0)$]:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{\mathbf{i}\theta_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}.$$

Rotation om y-aksen med vinkel θ_y [indsæt $(x, y, z) = (0, 1, 0)$]:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_{\mathbf{j}\theta_y} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Rotation om z-aksen med vinkel θ_z [indsæt $(x, y, z) = (0, 0, 1)$]:

$$\mathbf{R}_z = \mathbf{R}_{\mathbf{k}\theta_z} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricen for rotation om z-aksen efterfulgt af rotation om y-aksen efterfulgt af rotation om x-aksen:

$$\mathbf{R}_x\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} CyCz & -CySz & Sy \\ SxSyCz + CxSz & -SxSySz + CxCz & -SxCy \\ -CxSyCz + SxSz & CxSySz + SxCz & CxCy \end{bmatrix},$$

hvor

$$Cx = \cos(\theta_x), \quad Sx = \sin(\theta_x),$$

$$Cy = \cos(\theta_y), \quad Sy = \sin(\theta_y),$$

$$Cz = \cos(\theta_z), \quad Sz = \sin(\theta_z).$$

MCG - 10

Spejling (reflektion) om plan gennem $O = (0,0,0)$ med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$, der har længde 1.

3×3 matricen for spejlingen:

$$\mathbf{I} - 2(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) = \begin{bmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_xn_y & -2n_xn_z \\ -2n_xn_y & 1-2n_y^2 & -2n_yn_z \\ -2n_xn_z & -2n_yn_z & 1-2n_z^2 \end{bmatrix},$$

hvor $\hat{\mathbf{n}} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$.
Den affine matrix er

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - 2(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Spejling om O har 3×3 matrix $-\mathbf{I}$.

En ortogonal matrix har determinant 1 eller -1.

En matrix A er en ortogonal matrix med determinant 1
hvis og kun hvis
A er matricen for en rotation.

Matricen for spejling er en ortogonal matrix med determinant -1.
Men spejlings-matricer udgør kun en lille andel af alle ortogonal matricer med determinant -1

Shear.
$\hat{\mathbf{n}}$: en vektor, der har længde 1.
$\mathbf{s}$ en vektor ortogonal på $\hat{\mathbf{n}}$.

Punkter i planen gennem O med normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ fastholdes af transformationen.
En vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ afbildes i $\mathbf{v} + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{v})\mathbf{s}$.
Den affine matrix for shear er

$$H_{\hat{\mathbf{n}},\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{s} \otimes \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} s_x n_x & s_x n_y & s_x n_z \\ s_y n_x & s_y n_y & s_y n_z \\ s_z n_x & s_z n_y & s_z n_z \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$ og $\hat{\mathbf{n}} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$.

$\mathbf{R}$ er 3×3 matricen for en rotation om O eller shear eller spejling om plan gennem O.

Den tilsvarende transformation om $C = O + \mathbf{x}$ har affin matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{x} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{x} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{R}$: 3×3 matricen for en rotation.

Find **Euler vinkler** $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ så

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z$$

hvor
$\mathbf{R}_x$ er rotation om x-aksen med vinklen θ_x
$\mathbf{R}_y$ er rotation om y-aksen med vinklen θ_y
$\mathbf{R}_z$ er rotation om z-aksen med vinklen θ_z.

Vinklen θ_y bestemmes ved:

$$\sin\theta_y = \mathbf{R}_{02}, \quad \cos\theta_y = \sqrt{1 - \sin^2\theta_y}.$$

Hvis $\cos\theta_y \neq 0$ så bestemmes θ_x og θ_z ved

$$\sin\theta_x = -\frac{\mathbf{R}_{12}}{\cos\theta_y}, \quad \cos\theta_x = \frac{\mathbf{R}_{22}}{\cos\theta_y},$$

$$\sin\theta_z = -\frac{\mathbf{R}_{01}}{\cos\theta_y}, \quad \cos\theta_z = \frac{\mathbf{R}_{00}}{\cos\theta_y}.$$

Hvis $\cos\theta_y = 0$ så vælg $\theta_z = 0$ og θ_x bestemmes ved

$$\sin\theta_x = \mathbf{R}_{21}, \quad \cos\theta_x = \mathbf{R}_{11}.$$

MCG - 11

$\mathbf{R}$ er 3×3 matricen for en rotation.

Find akse-vinkel repræsentationen af denne rotation: altså en retnningsvektor $\hat{\mathbf{r}} = (x, y, z)$ og en vinkel θ så $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}\theta}$.

Udregn trace$(\mathbf{R}) = R_{00} + R_{11} + R_{22}$.

Så er $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{2}(\text{trace}(\mathbf{R}) - 1))$. Det giver $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.
$\cos^{-1}$ skrives også som arccos.

Hvis $\theta = 0^\circ$: ingen rotation, $\hat{\mathbf{r}}$ er vilkårlig.

Hvis $\theta \neq 0^\circ$ og $\theta \neq 180^\circ$:

$$\mathbf{r} = (R_{21} - R_{12}, R_{02} - R_{20}, R_{10} - R_{01}), \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{||\mathbf{r}||}\mathbf{r}.$$

Hvis $\theta = 180^\circ$: Bestem det største af tallene R_{00}, R_{11}, R_{22}.

R_{00} størst: $\quad x = \frac{1}{2}\sqrt{R_{00} - R_{11} - R_{22} + 1}, \quad y = \frac{R_{01}}{2x}, \quad z = \frac{R_{02}}{2x}.$

R_{11} størst: $\quad y = \frac{1}{2}\sqrt{R_{11} - R_{00} - R_{22} + 1}, \quad x = \frac{R_{01}}{2y}, \quad z = \frac{R_{12}}{2y}.$

R_{22} størst: $\quad z = \frac{1}{2}\sqrt{R_{22} - R_{00} - R_{11} + 1}, \quad x = \frac{R_{02}}{2z}, \quad y = \frac{R_{12}}{2z}.$

En **kvaternion** q skrives som

$$q = (w, x, y, z),$$

eller

$$q = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Hvis vi sætter $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ så skriver vi også

$$q = (w, \mathbf{v}),$$

eller

$$q = w + \mathbf{v}.$$

Addition af kvaternioner:

$(w_1, x_1, y_1, z_1) + (w_2, x_2, y_2, z_2) = (w_1 + w_2, x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$

Skalarmultiplikation:

$$a(w, x, y, z) = (aw, ax, ay, az).$$

Magnitude af kvaternion:

$$||q|| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

hvor $q = (w, x, y, z)$.
Hvis $q \neq (0, 0, 0, 0)$ har kvaternionen

$$\frac{1}{||q||} q$$

magnitude 1 og siges at være normaliseret.

Rotation om aksen $\hat{\mathbf{r}}$ med vinkel θ repræsenteres af kvaternionen

$$q = (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{r}}).$$

Eller

$$(\cos\left(\frac{360^\circ - \theta}{2}\right), \sin\left(\frac{360^\circ - \theta}{2}\right)(-\hat{\mathbf{r}})) = (-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{r}}) = -q.$$

Matricen for rotationen, der er repræsenteret af den normaliserede kvaternion $q = (w, x, y, z)$:

$$\begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

MCG - 12

Multiplikation af kvaternioner:
Ved udregning af

$$(w_2 + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k})(w_1 + x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$

benyttes følgende regler:

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k},\ \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i},\ \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j},\ \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

Vi får

$$(w_2, \mathbf{v}_2)(w_1, \mathbf{v}_1) = (w_2 w_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1, w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1),$$

og specielt

$$(0, \mathbf{v}_2)(0, \mathbf{v}_1) = (-\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1).$$

Regneregler: alle sædvanlige undtagen den kommutative lov.
Så normalt er

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1.$$

Desuden er

$$||q_1 q_2|| = ||q_1|| \cdot ||q_2||.$$

Identitet:

$$(w, \mathbf{v})(1, \mathbf{0}) = (1, \mathbf{0})(w, \mathbf{v}) = (w, \mathbf{v}).$$

Invers: hvis $q = (w, \mathbf{v}) \neq (0, \mathbf{0})$ så har q invers

$$q^{-1} = \frac{1}{||q||^2}(w, -\mathbf{v}).$$

Hvis q er normaliseret ($||q|| = 1$) så er

$$q^{-1} = (w, -\mathbf{v}).$$

Den inverse kvaternion opfylder:

$$qq^{-1} = q^{-1}q = (1, \mathbf{0}).$$

Rotation med vinklen θ om aksen med retningsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ repræsenteres af kvaternionen

$$q = (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{r}}),$$

som opfylder $||q|| = 1$.

Hvis $\mathbf{p}$ er en vektor i rummet så skal $R_q(\mathbf{p})$ angive den vektor som $\mathbf{p}$ roteres over i.

Hvis vi opfatter $\mathbf{p}$ som en kvaternion, $(0, \mathbf{p})$, så kan $R_q(\mathbf{p})$ udregnes som

$$R_q(\mathbf{p}) = q\mathbf{p}q^{-1}.$$

Hvis $q = (w, \mathbf{v})$ så kan dette også udregnes som

$$R_q(\mathbf{p}) = (2w^2 - 1)\mathbf{p} + 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})\mathbf{v} + 2w(\mathbf{v} \times \mathbf{p}).$$

Omregning fra matrix-repræsentation af rotation til kvaternions-repræsentation. (teori fra side 191)

R: en rotationsmatrix.

Udregn:
$\text{trace}(R) = R_{00} + R_{11} + R_{22}$.
$\mathbf{r} = (R_{21} - R_{12}, R_{02} - R_{20}, R_{10} - R_{01})$.

$$q = (\text{trace}(R) + 1, \mathbf{r}) = \\ (R_{00} + R_{11} + R_{22} + 1, R_{21} - R_{12}, R_{02} - R_{20}, R_{10} - R_{01}).$$

Rotationen repræsenteres så af den normaliserede kvaternion

$$\frac{1}{||q||} q.$$

MCG - 13

Lineær interpolation:

Find en parameterfremstilling $Q(t)$ for en linie, så $Q(t_i) = P_i$ og $Q(t_{i+1}) = P_{i+1}$, hvor P_i og P_{i+1} er punkter og $t_i < t_{i+1}$ er tider.

Løsning

$$Q(t) = P_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(P_{i+1} - P_i).$$

Hermite kurver:

Find kurve $Q(t)$ så $Q(0) = P_0$, $Q(1) = P_1$, $\mathbf{Q}'(0) = \mathbf{P}'_0$ og $\mathbf{Q}'(1) = \mathbf{P}'_1$, hvor P_0 og P_1 er punkter og $\mathbf{P}'_0$ og $\mathbf{P}'_1$ er vektorer.

Gæt: $Q(t) = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + D$, hvor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ er vektorer og D er et punkt.
Så er $\mathbf{Q}'(t) = 3\mathbf{a}t^2 + 2\mathbf{b}t + \mathbf{c}$.

Krav: $\quad Q(0) = D = P_0 \quad Q(1) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + D = P_1$.
$\quad \mathbf{Q}'(0) = \mathbf{c} = \mathbf{P}'_0 \quad \mathbf{Q}'(1) = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{P}'_1$.

Løsning: $\mathbf{a} = 2(P_0 - P_1) + \mathbf{P}'_0 + \mathbf{P}'_1$, $\mathbf{b} = 3(P_1 - P_0) - 2\mathbf{P}'_0 - \mathbf{P}'_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{P}'_0$ og $D = P_0$.

Omregning fra rotationsmatrix til normaliseret kvaternion:

R: en 3×3 rotationsmatrix.

Udregn:

$$q = (R_{00} + R_{11} + R_{22} + 1, R_{21} - R_{12}, R_{02} - R_{20}, R_{10} - R_{01}).$$

Rotationen repræsenteres så af den normaliserede kvaternion

$$\frac{1}{||q||} q.$$

Anden metode (hvis trace(R) < 0 ?):
Find den største af R_{00}, R_{11}, R_{22}.

R_{00} størst: normalisér kvaternionen

$$(R_{21} - R_{12}, R_{00} - R_{11} - R_{22} + 1, R_{01} + R_{10}, R_{02} + R_{20}).$$

R_{11} størst: normalisér kvaternionen

$$(R_{02} - R_{20}, R_{01} + R_{10}, R_{11} - R_{00} - R_{22} + 1, R_{12} + R_{21}).$$

R_{22} størst: normalisér kvaternionen

$$(R_{10} - R_{01}, R_{02} + R_{20}, R_{21} + R_{12}, R_{22} - R_{00} - R_{11} + 1).$$

MCG - 14

Hermite kurver:

Vi søger en kurve $Q(u)$.
$t_0 < t_1$ er tal (tider).
P_0 og P_1 er punkter. Vi ønsker: $Q(t_0) = P_0$ og $Q(t_1) = P_1$.
$\mathbf{P}'_0$ og $\mathbf{P}'_1$ er vektorer. Vi ønsker: $\mathbf{Q}'(t_0) = \mathbf{P}'_0$ og $\mathbf{Q}'(t_1) = \mathbf{P}'_1$.

Hvis $t_0 = 0$ og $t_1 = 1$ så kan $Q(u)$ beregnes fra formlen:

$$Q(u) = UMG,$$

hvor

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \mathbf{P}'_0 \\ \mathbf{P}'_1 \end{bmatrix}.$$

G er egentlig en 4×3 matrix hvor rækkerne er punkter/vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Hvis $t_0 = 0$ men $t_1 \neq 1$ så erstattes U og G med

$$U = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{t_1^3} & \frac{t^2}{t_1^2} & \frac{t}{t_1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad G = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \frac{1}{t_1}\mathbf{P}_0' \\ \frac{1}{t_1}\mathbf{P}_1' \end{bmatrix}.$$

Så er $Q(t) = UMG$.

Bézier kurver:

$P_0, P_1, \ldots, P_n$ er punkter, kaldet kontrolpunkter.

Bézier kurven

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} P_i, \quad \text{hvor} \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

opfylder at $Q(0) = P_0$ og $Q(1) = P_n$.

Mest interessant er $n = 3$:

$$Q(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3.$$

Da $(1-u)^3 + 3u(1-u)^2 + 3u^2(1-u) + u^3 = 1$ er $Q(u)$ en affin kombination af P_0, P_1, P_2, P_3.

Desuden er $(1-u)^3 \geq 0$, $3u(1-u)^2 \geq 0$, $3u^2(1-u) \geq 0$ og $u^3 \geq 0$. Derfor er $Q(u)$ en konveks kombination af P_0, P_1, P_2, P_3.

$$J_{3,0}(u) = (1-u)^3 = 1 - 3u + 3u^2 - u^3$$

$$J_{3,1}(u) = 3u(1-u)^2 = 3u - 6u^2 + 3u^3$$

$$J_{3,2}(u) = 3u^2(1-u) = 3u^2 - 3u^3$$

$$J_{3,3}(u) = u^3$$

MCG - 15

Interpolation af rotation.

p og q: rotationskvaternioner.

Sfærisk lineær interpolation:

Bestem vinklen θ mellem p og q ved $\cos\theta = p \cdot q$ (prikprodukt af p og q).

Derefter får vi interpolationen:

$$\mathrm{slerp}(p, q, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)p + \sin(t\theta)q}{\sin(\theta)}.$$

Lineær interpolation:

Sæt

$$r = (1 - t)p + tq.$$

Så fås den lineære interpolation ved normalisering af r:

$$\text{lerp}(p, q, t) = \frac{1}{||r||} r.$$

Automatisk generering af Hermite kurver.

$P_0, P_1, \ldots, P_n$: punkter. Vi ønsker at finde Hermite kurver $Q_0(u), Q_1(u), \ldots, Q_{n-1}(u)$ som opfylder

- $Q_i(0) = P_i$ og $Q_i(1) = P_{i+1}$ for alle $i = 0, 1, \ldots, n-1$
- $\mathbf{Q}_i'(1) = \mathbf{Q}_{i+1}'(0)$ for alle $i = 0, 1, \ldots, n-2$
- $\mathbf{Q}_i''(1) = \mathbf{Q}_{i+1}''(0)$ for alle $i = 0, 1, \ldots, n-2$
- $\mathbf{Q}_0''(0) = \mathbf{0}$ og $\mathbf{Q}_{n-1}''(1) = \mathbf{0}$ (naturlige ende betingelser).

For at bestemme $\mathbf{P}'_0 = \mathbf{Q}'_0(0), \mathbf{P}'_1 = \mathbf{Q}'_1(0) = \mathbf{Q}'_0(1), \ldots, \mathbf{P}'_{n-1} = \mathbf{Q}'_{n-1}(0) = \mathbf{Q}'_{n-2}(1), \mathbf{P}'_n = \mathbf{Q}'_{n-1}(1)$ opstilles følgende ligningssystem (med en $(n+1) \times (n+1)$ matrix):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}'_0 \\ \mathbf{P}'_1 \\ \mathbf{P}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}'_{n-2} \\ \mathbf{P}'_{n-1} \\ \mathbf{P}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_1 - P_0) \\ 3(P_2 - P_0) \\ 3(P_3 - P_1) \\ \vdots \\ 3(P_{n-1} - P_{n-3}) \\ 3(P_n - P_{n-2}) \\ 3(P_n - P_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Når $\mathbf{P}'_0, \mathbf{P}'_1, \ldots, \mathbf{P}'_n$ er bestemt fra ovenstående ligninger, så kan hver Q_i beregnes som

$$Q_i(u) = UMG,$$

hvor

$$U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ \mathbf{P}'_i \\ \mathbf{P}'_{i+1} \end{bmatrix}.$$