Omprøve i "Matematik for programmører"
Spiluddannelsen, 7. semester
30. august 2006, i tidsrummet 9.00-13.00

Alle sædvanlige hjælpemidler må medtages.
Herunder lommeregnere, men ikke personlige computere og mobiltelefoner.
Det er vigtigt, at tankegangen bag opgaveløsningerne fremgår af besvarelsen og at mellemregninger medtages i passende omfang.
De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Opgave 1:(15%) Lad vægtene i en vægtet graf G være givet på følgende måde

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	–	1	–	–	–	–	–
v_2	1	–	1	4	–	–	–
v_3	–	1	–	–	–	–	–
v_4	–	4	–	–	1	1	–
v_5	–	–	–	1	–	–	–
v_6	–	–	–	1	–	–	1
v_7	–	–	–	–	–	1	–

(Her betyder "-" ud for v_i og v_j, at der ingen kant er mellem v_i og v_j. Tilsvarende betyder "1" ud for v_i og v_j, at der er en kant af vægt 1 mellem v_i og v_j og "4" ud for v_i og v_j betyder, at der er en kant af vægt 4 mellem v_i og v_j

I denne opgave søger vi den korteste vej fra v_6 til v_1. Lad en heuristisk funktion være givet ved $h(v_1) = 0$, $h(v_2) = 1$, $h(v_3) = 2$, $h(v_4) = 2$, $h(v_5) = 3$, $h(v_6) = 3$ og $h(v_7) = 4$.

1. *Er den heuristiske funktion monoton? Er den heuristiske funktion tilladelig (admissible)? Argumenter for dine svar.* 4
2. *Find ved hjælp af en A^*-algoritme en korteste vej fra v_6 til v_1.* 11

Opgave 2: *(9%)* *Punkterne* $P_0 = (0,1,1)$, $P_1 = (1,0,1)$ *og* $P_2 = (0,1,0)$ *ligger i et plan, som vi kalder* M. *Find en vektor, som står vinkelret på* M. *Normaliser den fundne vektor.*

Opgave 3: *(9%)* *Lad et punkt være beskrevet ved de Cartesiske koordinater* $(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. *Find de tilhørende sfæriske (spherical) koordinater.*

Opgave 4: *(15%)* *Betragt planet gennem origo med normalvektoren*

$$\vec{n} = [1, 1, 0]^T.$$

Vi betragter først shear (forskydning) med forskydningsvektoren $\vec{s} = [0, 0, 1]^T$.

1. *Opskriv matricen, som beskriver ovennævnte affine transformation*

Herefter udføres refleksion om yz-planet (spejling i yz-planet)

2. *Opskriv matricen, som beskriver den affine transformation svarende til først at udføre ovennævnte shear og dernæst at udføre ovennævnte refleksion.*

Til sidst udføres translation med forskydningsvektoren

$$\vec{t} = [1, 2, 4]^T.$$

3. *Opskriv matricen, som beskriver den affine transformation svarende til først at udføre ovennævnte shear, dernæst at udføre ovennævnte refleksion og til sidst at udføre ovennævnte forskydning.*

Opgave 5: *(15%)* *Lad*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 1. *Vis, at A er en rotationsmatrix.*

2 2. *Hvad bliverpunktet $(5, 0, 5)$ roteret over i?*

8 3. *Bestem orienteret rotationsakse og hertilhørende rotationsvinkel.*

Opgave 6: *(15%)*

3 1. *Find kvaternionen q, som svarer til rotation om aksen $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ med 180^o.*

3 2. *Find kvaternionen p, som svarer til rotation om aksen $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ med 180^o.*

4 3. *Udregn $p \cdot q$.*

5 4. *Find orienteret rotationsakse og tilhørende rotationsvinkel for den sammensatte rotation bestående af først rotation om aksen $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ med 180^o og dernæst rotation om aksen $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ med 180^o.*

Opgave 7: *(5%)* *Giv et argument for, at resultatet af to på hinanden følgende rotationer alt ialt er en rotation.*

Opgave 8: *(10%)*

5

1. *Opskriv formlen for den kubiske Bézier-kurve med støttepunkter*

$$Q_0 = (1,0,1) \quad Q_1 = (0,1,1) \quad Q_2 = (1,0,0) \quad Q_3 = (0,0,1)$$

5

2. *Ovenfor beskrevne Bézier-kurve er en Hermite-kurve med startpunkt $P_0 = Q_0$ og slutpunkt $P_1 = Q_3$. Hvad er de tilhørende værdier af $\vec{P}_0'$ og $\vec{P}_1'$?*

Opgave 9: *(7%)* *Det oplyses, at et objekt befinder sig i positionen $(0,1,0)$ til tiden $t_0 = 0$, at det befinder sig i positionen $(0,1,1)$ til tiden $t_1 = \frac{1}{4}$, og at det befinder sig i positionen $(0,0,1)$ til tiden $t_2 = 1$.*

1. *Opskriv det tilhørende Lagrangepolynomium.*

2. *Hvor befinder objektet sig til tiden $t = \frac{1}{2}$ hvis vi antager, at Lagrangepolynomiet beskriver den faktiske bevægelse?*

Husk at skrive jeres fulde navn på hver side af besvarelsen. ***Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side*** *af besvarelsen. God arbejdslyst.*

Delvis facitliste for

Omprøve 30. august 2006
(skitseform)

opg 1 løsning udeladt

opg 2

$$\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

opg 3

$$\theta = 0^\circ \quad \rho = 1 \quad \phi = 45^\circ$$

opg 4

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3)
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

opg 5

1) $\det(A)=1 \quad AA^T = I$

2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \theta = 180^\circ$

opg 6 1) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) $\left(0, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ og 240°

eller

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og 120°

opg. 7

$(AB)(AB)^T = ABB^TA^T = AIA^T$

$= AA^T = I$

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$

opg 8

1) $Q(u) = (1-u)^3(1,0,1)$

$+ 3u(1-u)^2(0,1,1)$

$+ 3u^2(1-u)(1,0,0)$

$+ u^3(0,0,1)$

2) $\vec{P_0}' = 3(Q_1 - Q_0) = (-3,3,0)$

$\vec{P_1}' = (-3,0,3)$

opg 9

1) $\left(0, -\frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{3}t + 1, -4t^2 + 5t\right)$

2) $\left(0, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right)$