En graf siges at være planar hvis den kan tegnes i planen uden kanter der krydser.

Hvis en plan tegning af en sammenhængende graf med v punkter og e kanter inddeler planen i r regioner så er

$$v - e + r = 2.$$

En planar graf med $v \geq 2$ punkter har højst

$$3v - 6$$

kanter.

En farvning med k farver af en graf $G = (V, E)$ er funtion $c : V \to K$, som opfylder at

$$c(v) \neq c(u) \quad \text{for alle } \{v, u\} \in E,$$

hvor K er en mængde af k elementer (farver), f.eks. $K = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Det kromatiske tal $\chi(G)$ af en graf G er det mindste tal k så G har en farvning med k farver.

Enhver planar graf kan farves med 4 farver.

Et beslutningsproblem er et problem hvor svaret på input-
puttet er enten JA eller NEJ.

Et beslutningsproblem tilhører klassen P hvis det kan løses af en algoritme i polynomiel tid.

Et beslutningsproblem tilhører klassen NP (non-deterministisk polynomiel) hvis der findes en algoritme der med et ekstra input i polynomiel tid kan eftervise at svaret er JA.

$$P \subseteq NP$$

Eksempler på problemer i NP:

k-farvning
Input: graf G
Spørgsmål: har G en farvning med k farver.
2-farvning er i P.

Planar k-farvning
Input: planar graf G
Spørgsmål: har G en farvning med k farver.
Planar 2-farvning er i P.
Planar 4-farvning er i P.

Eksempler på problemer i NP:

Hamilton-kreds
Input: graf G
Spørgsmål: har G en Hamilton-kreds.

TSP
Input: vægtet komplet graf G, en konstant C
Spørgsmål: har G en Hamilton-kreds af længde højst C.

Givet: beslutningsproblemer A og B hvor mængden af mulige inputs er hhv. S_A og S_B.
En funktion $f : S_A \to S_B$ som opfylder

- A's svar på input x = B's svar på input $f(x)$
- der findes en algoritme der beregner $f(x)$ i polynomiel tid

kaldes en polynomiel tids reduktion af A til B.

Hvis der findes en algoritme der løser B i polynomiel tid så findes der en algoritme der løser A i polynomiel tid.

Et problem er NP-komplet hvis

- det er i NP, og
- ethvert problem i NP har en polynomiel tids reduktion til dette problem.

Hvis et NP-komplet problem kan løses i polynomiel tid så kan ethvert problem i NP løses i polynomiel tid og så er $P = NP$.

Eksempel:

Vi ved at Hamilton-kreds er NP-komplet.
For at vise at TSP er NP-komplet skal vi

- vise at TSP er i NP,

- vise at der findes polynomiel tids reduktion af Hamilton-kreds til TSP.