

Afsnit 1.2

Sætning 1

Enhver matrix er rækkeækvivalent med en *entydig* matrix på reduceret trappeform.

Rækkereduktionsalgoritmen beviser at der eksisterer en sådan matrix på reduceret trappeform.

Entydigheden af matrixen på reduceret trappeform er bevist i Appendix A (ikke pensum).

Definition

Hvis en matrix A er rækkeækvivalent med en matrix B på reduceret trappeform så kaldes en position i A en pivotposition hvis der på den tilsvarende position i B er en ledende indgang.

Rækkereduktionsalgoritme

Algoritmen bringer først matricen på trappeform. Antag at de første rækker allerede er på den rigtige form og at der er 0'er under disse rækkers pivotpositioner. Ignorer disse rækker.

1. Betragt den første søjle med en indgang $\neq 0$.
2. Ombyt om nødvendigt rækker så denne søjle indgang $\neq 0$ i første række.
3. Adder et multiplum af denne række til hver af de andre rækker så den betragtede kun har en indgang $\neq 0$ (pivotposition).

4. Ignorer den øverste række, og gentag 1.-3. indtil der ikke er flere rækker eller kun 0-rækker.

Matricen er nu på trappeform.

5. Betragt pivotpositionerne fra højre mod venstre. Gang rækken med pivotposition med en konstant så pivotindgangen er 1. Adder multiplum af række til hver af de ovenstående række så der er 0'er i søjlen over pivotpositionen.

Løsning af lineært ligningssystem (når den udvidede koefficient matrix er på reduceret trappeform)

Hvis sidste søjle er en pivotsøjle så er en ligning på formen:

$$0x_1 + \dots + 0x_n = 1,$$

og ligningssystemet er dermed inkosistent.

Antag at sidste søjle ikke er en pivotsøjle.

Variablen x_i siges at være

- en bunden variabel hvis søjle i er en pivotsøjle,
- en fri variabel, hvis søjle i ikke er en pivotsøjle.

Hvis x_i er en bunden variabel så er der en ligning på formen

$$x_i + c_{i+1}x_{i+1} + \dots + c_n x_n = b,$$

hvor $c_j = 0$ med mindre x_j er en fri variabel.

x_i kan altså udtrykkes ved de frie variable.

Alle ligninger er på denne form (eller $0 = 0$).

Der er altså ingen restriktioner på værdierne af de frie variable.

Når der ikke er der ikke er pivot i sidste søjle er ligningssystemet konsistent. Løsningen er entydig hvis og kun hvis der ikke er frie variable.