Definition. Hvis H er en delmængde af $\mathbb{R}^n$ så siger vi at H er et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis følgende tre betingelser er opfyldt:

1. $\mathbf{0} \in H$.

2. Hvis $\mathbf{u} \in H$ og $\mathbf{v} \in H$ så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.

3. Hvis $\mathbf{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c\mathbf{u} \in H$.

$\mathbb{R}^n$ er et "rum".

H er en del af et rum, som selv "ligner" et rum.

- Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ så er Span$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$: det kaldes underrummet udspændt af $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$.

- Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]$ er en $m \times n$ matrix, så defineres søjlerummet af A som

$$\text{Col } A = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

  Det er et underrum af $\mathbb{R}^m$.

- Nulrummet af A, skrives Nul A, er løsningsmængden til det homogene ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
  Det er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Betegnelsen ....rum bør kun benyttes om underrum.

Hvis H er et underrum af $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\} \subset H$ så siger vi at $\mathcal{B}$ er en basis for H hvis følgende betingelser er opfyldt:

1. Span $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\} = H$, og

2. $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ er lineært uafhængige.

Ethvert underrum $H \neq \{\mathbf{0}\}$ af $\mathbb{R}^n$ har en basis.

Eksempel: $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ (der er et underrum af $\mathbb{R}^n$).

- I afsnit 1.5 er det beskrevet hvordan man finder en parameterfremstilling af løsningsmængden til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ på formen

  $$s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + \ldots + s_p\mathbf{v}_p,$$

  hvor der er en vektor $\mathbf{v}_i$ for hver frie variabel.

  $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er så en basis for Nul A.

- Pivotsøjlerne i matricen A udgør en basis for Col A.