To $n \times n$ matricer A og B siges at være similære hvis der findes en invertibel $n \times n$ matrix P så

$$A = PBP^{-1}.$$

En $n \times n$ matrix A er *diagonaliserbar* hvis den er similær med en diagonalmatrix.

A er altså diagonaliserbar hvis der findes en invertibel matrix P og en diagonalmatrix D så $A = PDP^{-1}$.

Sætning

En $n \times n$ matrix A er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes n lineært uafhængige vektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$, som er egenvektorer for A.

Hvis disse egenvektorer findes og $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ er de tilhørende egenværdier så er

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ og D er diagonalmatricen tallene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen (i denne rækkefølge).

A: en $n \times n$ matrix.

Er A diagonaliserbar ?

Hvis ja: hvordan finder man P og D ?

Beregn det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda I)$ og bestem rødderne.

Hvis det karakteristiske polynomium har en kompleks rod $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ så er A ikke diagonaliserbar.

Hvis alle rødder er reelle så kan vi skrive

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - r_1)^{k_1} (\lambda - r_2)^{k_2} \dots (\lambda - r_s)^{k_s},$$

hvor $r_1, r_2, \dots, r_s$ er de forskellige rødder og $k_1, k_2 \dots, k_s$ er deres multipliciteter.
$r_1, \dots, r_s$ er egenværdier med algebraisk multiplicitet $k_1, \dots, k_s$.
Så er $1 \leq$ (dimension af egenrum hørende til r_i) $\leq k_i$.
Hvis (dimension af egenrum hørende til r_i) $= k_i$, for alle $i = 1, \dots, s$ så er A diagonaliserbar.

For hvert $i = 1, \ldots, s$, find en basis for egenrummet hørende til egenværdien r_i. Disse s baser udgør tilsammen en lineært uafhængig mængde $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ af n vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Specialtilfælde (Sætning 6)

Hvis det$(A - \lambda I)$ har n forskellige reelle rødder så er A diagonaliserbar.

Lineær uafhængighed.

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$.

En linear kombination af disse er et udtryk på formen:
$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m$
hvor $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$.

Span$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ er mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ der kan skrives som linear kombination af $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uafhængige så kan en vektor i $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ kun på én måde skrives som linear kombination af $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Definition
Hvis ligningen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

kun har én løsning: $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ så siger vi at $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uafhængige.

Hvis der findes en anden løsning så er $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ lineært afhængige.

Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uafhængige så er ingen vektor $\mathbf{v}_i$ en linear kombination af *de andre* vektorer i $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$.

Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært afhængige så er enten $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ eller der findes $j > 1$ så $\mathbf{v}_j$ er linear kombination af $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$.

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ er lineært uafhængige
hvis og kun hvis
matricen $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m]$ har pivot position i alle søjler.