Det hængende kabel
E-opg 1
Det Teknisk-Naturvidenskabelige Basisår
2003-2004
Computerstøttet Beregning

1 Introduktion

I denne opgave studeres et hængende kabel. Det er velkendt, at hvis man ophænger en snor eller et andet homogent kabel ved at fiksere endepunkterne, så vil kablet på grund af tyngdekraften synke ned i midten og danne en krum kurve. Tænk bare på en tøjsnor eller en højspændingsledning. Ved passende fysiske overvejelser kan det vises, at et hængende kabel, danner en kurve, en kædelinie eller på engelsk “Catenary”, beskrevet som grafen for funktionen

$$f(x) = h_0 + \lambda \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{1}$$

hvor $\lambda = T/\rho$ er en konstant, som afhænger af materialets densitet ρ og spændingen T i kablets laveste punkt, og h_0 er en konstant, som afhænger af kablets højde. Akserne er valgt således, at $x = 0$ er punktet, hvor kabelhøjden har sit minimum. Som bekendt er

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

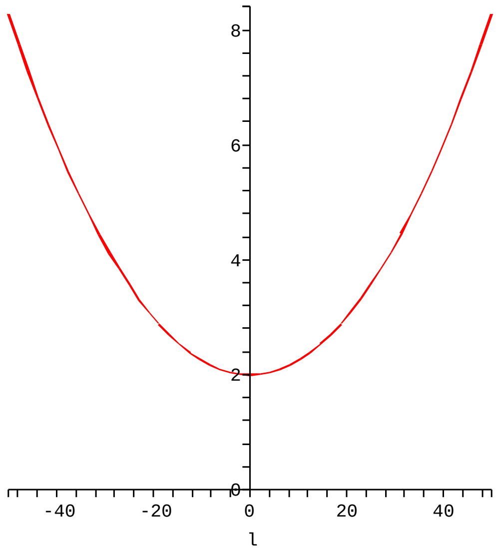
I Figur 4 ses grafen for funktion f.

Eksamensopgaven består af to delopgaver. Formålet med første opgave er at bestemme materialeparameteren λ udfra simple fysiske målinger. I den anden opgave beregnes længden af et hængende kabel.

Sørg for at inddrage både teori og numeriske eksperimenter i jeres besvarelse af opgaverne. Omfanget af besvarelsen skal være sådan, at den kan danne basis for en gruppeeksamen. Man kan med fordel tage udgangspunkt i de Maple-filer, som der er udarbejdet i løbet af kurset, og som kan findes på kursets hjemmeside.

2 Delopgave 1: Bestemmelse af parameteren λ.

Antag at et kabel er ophængt mellem to lige høje pæle med højde h og med afstanden L imellem. Da kablet er symmetrisk kan vi antage, at pælene er placeret i punkterne $x = L/2$ og $x = -L/2$. Antag endvidere, at kablet i midten synker s. Lad f være funktionen, som beskriver kædelinien.



Figur 1: Graf for $f(x)$, hvor $\lambda = 200$ og $h_0 = -198$

1. Vis, at

$$f(L/2) = h_0 + \lambda \cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right) = h,$$
$$f(0) = h_0 + \lambda = h - s.$$

   Brug disse formler til at udlede ligningen

$$\lambda \cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right) = \lambda + s. \tag{2}$$

2. Redegør for Bisektionsmetoden og Newtons metode til nulpunktsbestemmelse, og redegør for funktioniterations-metoden til løsning af fixpunktligninger.

3. Antag, at vi har valgt parameteren $L = 100$ og målt synkehøjden $s = 10$. Udfra (2) fås ligningen

$$\lambda \cosh\left(\frac{50}{\lambda}\right) = \lambda + 10, \tag{3}$$

   som kan bruges til at bestemme λ.

   (a) Løs (3) numerisk ved brug af Bisektionsmetoden og Newtons metode med en passende præcision. Argumenter udfra teorien i afsnit 2.2 og 2.4 i Turner for jeres brug af metoderne.

(b) Ligningen (3) kan omskrives til en fixpunkt-ligningen. Vis, at (3) kan omskrives til ligningerne

$$\lambda = \frac{\lambda + 10}{\cosh\left(\frac{50}{\lambda}\right)}, \tag{4}$$

$$\lambda = \lambda \cosh\left(\frac{50}{\lambda}\right) - 10. \tag{5}$$

Undersøg ved at foretage computereksperimenter og bruge Theorem 1, s 30, i Turners bog, om funktioniterations-metoden kan bruges til at løse fixpunkt-ligningerne (4) og (5).

(c) Sammenlign de anvendte metoder til løsning af (3) både hvad angår det konkrete resultat og konvergensrate.

3 Delopgave 2: Længden af et hængende kabel og Taylors formel

Den kurve, som et hængende kabel danner, er beskrevet ved parameterfremstillingen

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ h_0 + \lambda \cosh\left(\frac{t}{\lambda}\right) \end{pmatrix}, \quad t \in [-L/2, L/2]. \tag{6}$$

Med den viden I har fra efterårets matematikkursus, er det ikke svært at vise, at længden af kædelinien er givet ved

$$l = \int_{-L/2}^{L/2} |\alpha'(t)| dt = 2\lambda \sinh\left(\frac{L}{2\lambda}\right),$$

hvor vi som bekendt har

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Antag nu, at vi gerne vil beregne længden l, men at vi ikke har funktionen sinh eksplicit til rådighed. Vi er derfor nød til at bruge Taylorpolynomier til at beregne en approksimation af l:
   Definer funktionen

   $$g(x) = \lambda \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right). \tag{7}$$

   Redegør for Taylors formel og udled Taylorpolynomiet af grad N for funktionen g omkring punktet $x = 0$. Giv en vurdering af det tilhørende restled.

2. Antag som tidligere, at $L = 100$ og lad λ have den værdi, I fandt i Delopgave 1. Overvej udfra vurderingen på restleddet, hvilken grad Taylorpolynomiet skal have for at approksimere længden $l = g(L)$ med en nøjagtighed på 10^{-6}. Beregn derefter l med denne nøjagtighed.