Interpolation
E-opg 2
Det Teknisk-Naturvidenskabelige Basisår
2003-2004
Computerstøttet Beregning

1 Introduktion

Denne eksamensopgave omhandler metoder til interpolation med vægt på Lagrange-polynomier og splines. Der er dels nogle teoretiske opgaver, dels nogle praktiske og numeriske opgaver. Sørg for at inddrage både teori og numeriske eksperimenter i jeres besvarelse. Omfanget af besvarelsen skal være sådan, at den kan danne basis for en gruppeeksamen. Man kan med fordel tage udgangspunkt i de Maple-filer, som er udarbejdet i løbet af kurset, og som kan findes på kursets hjemmeside.

2 Indledende definitioner

1. Redegør for definitionen af Lagrange-polynomier, herunder for Lagrange basispolynomier.
2. Redegør for definitionerne af splines af grad m og af naturlige kubiske splines.
   Argumenter for, at der ikke findes koefficienter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sådan

   $$s(x) = \begin{cases} 2 + 2x - 2x^3 & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

   er en naturlig, kubisk spline, som interpolerer mellem punkterne (0,2),(1,2) og (2,0).

3 Folketal

Udviklingen i folketallet i Danmark er beskrevet i Tabel 1.

1. Find Lagrangepolynomiet, der interpolerer folketallet i Danmark udfra de givne data i Tabel 1. Giv udfra det fundne polynomium en vurdering af folketallet i Danmark i 1955. Approksimer (extrapoler) igen udfra Lagrangepolynomiet, hvad folketallet er i 2010.

År	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Folketal	3.55	3.84	4.28	4.59	4.94	5.12	5.14	5.33

Tabel 1: Folketal i Danmark i millioner (kilde: Danmarks Statistik)

2. Find den naturlige kubiske spline, der interpolerer folketallet i Danmark udfra de givne data i Tabel 1. Vurder udfra den fundne spline folketallet i Danmark i 1955 og 2010.

3. Sammenlign og vurder resultaterne.

4 Runges eksempel

Definer funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \quad x \in [-1,1] \tag{1}$$

og definer de ligeligt fordelte punkter

$$x_k = -1 + \frac{2k}{N}, \quad k = 0,1,\ldots,N. \tag{2}$$

Antag at funktionen f er samplet i punkterne x_k, dvs. at data er givet ved $(x_k, f(x_k))$.

1. Beregn Lagrangepolynomiet, der interpolerer punkterne $(x_k, f(x_k)), k = 0,1,\ldots,10$. Beregn og plot vha. Maple $f^{(11)}(x)$ og find maksimum for denne funktion på intervallet $[-1,1]$. Giv udfra Theorem 2, side 80 i Turner, en vurdering af fejlen $|f(x) - p(x)|$.
   Stemmer det med de numeriske resultater?

2. Beregn den naturlige, kubiske spline, der interpolerer punkterne $(x_k, f(x_k))$, $k = 0,1,\ldots,10$. Sammenlign den fundne spline med Lagrangepolynomiet fra (1).

Vi vil nu undersøge, hvilken effekt valget af samplingspunkter har for approksimation med Lagrangepolynomier:

- Hvad sker, hvis man har flere ($N > 10$) ligeligt fordelte punkter?
- Hvad sker, hvis man har punkter, som ikke er ligeligt fordelt?
- Hvad sker, hvis man vælger N punkter givet som de såkaldte Chebyshev interpolationspunkter defineret ved

$$x_k = -\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N+2}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,N.$$

5 Konvergensrate for naturlige, kubiske splines

I denne delopgave vil vi med numeriske eksperimenter undersøge konvergensraten for splines.

Lad funktionen f være givet ved (1) og lad punkterne $x_k, k = 0, 1, \ldots, N$ være givet ved (2). Lad s_N være den naturlige, kubiske spline, som interpolerer mellem de $N+1$ punkter $(x_k, f(x_k)), k = 0, 1, \ldots, N$. Det er væsentligt at have en vurdering af, hvor god en approksimation s_N er til f. Vi definerer derfor fejlen

$$e_N(x) = f(x) - s_N(x).$$

Definer endvidere punktet

$$x_c = \frac{x_0 + x_1}{2} = -1 + \frac{1}{N},$$

som er midtpunktet mellem x_0 og x_1. Formålet med denne opgave er at undersøge, hvor hurtigt $e_N(x_c)$ aftager når N vokser.

1. Beregn fejlen $e_N(x_c)$ for forskellige værdier af N. Hvad sker der når N vokser?

2. Vælg nu $N = 2^n$ for $n = 1, 2, \ldots$ og beregn igen for hvert N fejlen $e_N(x_c)$. Beregn endvidere brøken e_N/e_{2N} og undersøg derigennem mere præcist, hvordan fejlen udvikler sig.

3. Eksperimenter med andre valg af funktionen f og gentag ovenstående beregninger.

4. Generelt kan man bevise, at for N tilstrækkelig stor, så vil

   $$|e_N(x_c)| \approx C\frac{1}{N^2},$$

   hvor C er en konstant uafhængig af N. Passer det med jeres udregninger?