Det Teknisk-Naturvidenskabelige Basisår 2003 - 2004
Computerstøttet Beregning
Naturvidenskab - Datalogi/Software/Matematik

E-OPG 3

1 Introduktion

Dette er den tredje store opgave, som skal danne grundlag for evaluering af en del af kurset. Emnet er numerisk løsning af differentialligninger. Der er både en række spørgsmål vedrørende teorien, og nogle computer eksperimenter. *Opgaven forudsætter, at man har sat sig ind i teorien i Turner vedrørende numerisk løsning af differentialligninger, se pensumlisten.*

2 Opgaver

I de to første opgaver skal man give en gennemgang af de grundlæggende resultater fra Turner vedrørende numerisk løsnng af differentialligninger. Man skal også etablere forbindelsen til numerisk integration (kvadratur).

Opgave 1 Beskriv et trin i de fire metoder

- Eulers metode
- Korrigeret Euler metode
- Modificeret Euler metode
- Heuns metode

til numerisk løsning af en første ordens differentialligning. Lav tegninger, der angiver valgene, som man har gjort for at få metoderne. Forklar også, hvad information retningsfeltet for en første ordens differentialligning giver om løsningerne.

Forklar, at den modificerede Euler metode anvendt på problemet

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(a) = y_0,$$

til approksimation af $y(b)$, er det samme som trapezmetoden anvendt til at approksimere

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Forklar tilsvarende sammenhængen mellem den korrigerede Euler metode og midtpunktsreglen for numerisk integration.

Den næste opgave omhandler den klassiske fjerde ordens Runge-Kutta metode RK4.

Opgave 2 Beskriv den klassiske fjerde ordens Runge-Kutta metode. Forklar, at denne metode anvendt på

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(a) = y_0,$$

til approksimation af $y(b)$, er det samme som Simpsons regel anvendt til approksimation af

$$\int_a^b f(x)dx.$$

I den næste opgave skal vi se på ordenen af metoderne. Vi ser på den modificerede Euler metode, og på RK4 metoden. Opgaven går ud på at vise, at den modificerede Euler metode er en anden ordens metode, og RK4 en fjerde ordens metode.

Der ligger Maple worksheets til en del af udregningerne på hjemmesiden.

Opgave 3 Vi ser på begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 3.$$

Vis, at den eksakte løsning er givet ved

$$y(x) = 3e^{x^2}.$$

Vi skal bruge denne ligning til at undersøge ordenen af den modificerede Euler metode, og RK4 metoden, ved at beregne en approksimation til $y(2)$ med 2, 4, …, 2^k, …, trin. Differensen mellem den eksakte og den approksimative værdi skal ifølge teorien blive en faktor 1/4 mindre ved fordobling af antal trin, for en anden ordens metode, og en faktor 1/16 ved en fjerde ordens metode.

Eftervis, at det tilnærmelsesvis forholder sig som beskrevet, og forsøg at forklare de observerede afvigelser, ved at lave en række computereksperimenter.

Vi skal nu se på nogle populationsmodeller. Vi betegner med $x(t)$ antallet at individer til tiden t. Den simple model for eksponentiel vækst er givet ved

$$\frac{dx}{dt} = \kappa x, \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Løsningen er $x(t) = x_0 \exp(\kappa(t - t_0))$. Hvis $\kappa > 0$, har vi en vækstmodel, og hvis $\kappa < 0$, så er det en model for eksponentielt henfald.

En anden model er den logistiske model. Den er givet ved ligningen

$$\frac{dx}{dt} = \kappa_1 x - \kappa_2 x^2, \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Det er en separabel ligning, så man kan finde løsningen eksplicit. Resultatet er

$$x(t) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{x_0}{x_0 + (\frac{\kappa_1}{\kappa_2} - x_0)e^{-\kappa_1(t-t_0)}}. \tag{3}$$

Man ser umiddelbart, at $x_0 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ giver en konstant løsning, kaldet ligevægtsløsningen, og at alle andre ikke-nul løsninger konvergerer med denne konstante løsning eksponentielt hurtigt.

Opgave 4 Gennemgør ovennævnte overvejelser. Illustrer eventuelt grafisk, ved at plotte et antal løsninger, for passende valg af κ_1 og κ_2.

Runge-Kutta metoden, og andre metoder, kan anvendes til numerisk løsning af systemer af differentialligninger. Vi skal se på et system, som blandt andet anvendes til at modellere udvikling i en population af rovdyr og byttedyr. Populationen af byttedyr til tiden t er $x(t)$, og populationen af rovdyr er $y(t)$. Udviklingen i tid kan modelleres ved følgende system af differentialligninger

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t). \tag{5}$$

Her er α, β, γ, og δ fire positive parametre, der karakteriserer systemet.

Parameteren α er vækstraten for byttedyrene, se også (7) nedenfor. Leddet $-\beta x(t)y(t)$ angiver med hvilken rate byttedyrene bliver spist af rovdyrene. Parameteren γ angiver hvor hurtigt rovdyrene uddør, hvis der ingen byttedyr er, se også (8) nedenfor. Endelig leddet $\delta x(t)y(t)$ angiver vækstraten i rovdyrene, når de spiser byttedyrene.

Vi skal naturligvis specificere begyndelsesværdier $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ for at få en entydig løsning. Vi kan skrive systemet og begyndelsesbetingelsen på vektorform som

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Der er to løsninger, som det er interessant at se på. Det er løsningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 e^{\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

og løsningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 e^{-\gamma t} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Den første løsning (7) viser, at antallet af byttedyr vil vokse eksponentielt med tiden, når der ingen rovdyr er, og den anden løsning (8) viser, at rovdyrbestanden vil formindskes eksponentielt i tid, når der ingen byttedyr er. Det interessante er derfor at forstå, hvad der sker, når de to arter konkurrerer.

Opgave 5 Eftervis, at (7) og (8) begge er løsninger til (6). Gør rede for, at der til et givet punkt $(x, 0)$ på den positive x-akse (dvs. $x > 0$) findes mindst én løsningskurve af formen (7), som går igennem dette punkt. Gør tilsvarende rede for, at der til ethvert punkt $(0, y)$ på den positive y-akse findes en løsningskurve, som går gennem dette punkt.

Det er en konsekvens af eksistens- og entydighedssætningen, at to løsningskurver ikke kan skære hinanden. Derfor er det en konsekvens af resultatet fra Opgave 5, at hvis vi starter med $x_0 > 0$ og $y_0 > 0$, så vil løsningerne $x(t)$ og $y(t)$ være positive for alle $t \in \mathbf{R}$, og løsningskurven vil dermed forløbe i det indre af første kvadrant.

Vi vælger som eksempel værdierne

$$\alpha = 0.7, \qquad \beta = 0.005,$$
$$\gamma = 0.2, \qquad \delta = 0.001.$$

Der ligger på hjemmesiden Maple filer til at plotte løsningskurver i xy-planen. De kan bruges i besvarelsen af sidste opgave. Filerne anvender Maples indbyggede muligheder for at plotte løsninger til systemer af differentialligninger. Den underliggende numeriske metode er en variant af RK4, som kaldes RKF45. Parameterværdierne ovenfor er taget fra Turners eksempel 9, side 194.

Opgave 6 Anvend ovenstående parameterværdier sammen med begyndelsesværdierne $x(0) = 300$, $y(0) = 60$ til først at plotte løsningskurven for $0 \leq t \leq 3$. Forklar hvad kurven beskriver. Prøv derefter et længere tidsinterval, for eksempel først $0 \leq t \leq 6$, og derefter $0 \leq t \leq 18.5$. Hvordan kan man beskrive denne opførsel? Hvad sker der, hvis man ser på endnu længere tidsintervaller? Husk at forøge antallet af trin ved lange tidsintervaller.

Eksperimenter med andre begyndelsesværdier. Hvilken type løsning får man for lange tidsintervaller?

Eftervis, at de konstante funktioner $x(t) = 200$, $y(t) = 140$ (for alle t) er en løsning til (6). Det er den såkaldte ligevægtsløsning. Forklar hvorfor den kaldes en ligevægtsløsning.

Eksperimenter eventuelt med at ændre parameterværdierne α, β, γ, og δ.

Hvad sker der med løsningerne, hvis man tilføjer korrektioner svarende til den logistiske model (se (2))? Altså ved at man ser på systemet

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) - \xi x(t)^2, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) - \eta y(t)^2. \tag{10}$$

Her er ξ og η to (meget) små positive parametre. Plot nogle løsningskurver for lange tidsintervaller, for at se hvad der sker.