Computerstøttede beregninger

Lektion 3. Repetition

Kim Knudsen
kim@math.auc.dk

http://www.math.auc.dk/∼matarne/04-csb

Department of Mathematical Sciences

Aalborg University

Denmark

Taylors Formel

Motivation:

- En computer kan basalt set kun addere og multiplicere; hvordan beregnes de elementære funktioner $\sin, \cos, \exp \ldots$?
- Approksimation af komplicerede funktioner med polynomier;
- Teoretiske overvejelser om algoritmers kvalitet;

f er en N gange kontinuert differentiabel funktion på$I = (a, b)$. Lad $x \in I$ være fast, og lad $h \in \mathbb{R}$ være så lille, at $x + h \in I$. Så gælder Taylors formel

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \cdots + \frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) \\ &\quad + \frac{h^N}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1} dt \\ &= P_{N-1}(x;h) + R_N(x;h). \end{aligned}$$

Punktet x kaldes udviklingspunktet.

Funktionsevaluering - to spørgsmål

1. Hvor god en approksimation er Taylorpolynomiet P_{N-1} til en funktion f på et interval? Vurdering på restleddet:

$$|f(x+h) - P_{N-1}(x;h)| = |R_N(x;h)| \leq \frac{h^N}{N!}M,$$

hvor M opfylder, at $|f^{(N)}(y)| \leq M$ for alle $y \in I$.

2. Hvordan kan vi bruge Taylorpolynomier med udviklingspunkt $x \in I$ til at evaluere en funktion i et punkt $y \in I$ med en given præcision ϵ? Dvs sådan

$$|f(y) - P_{N-1}(x; y-x)| \leq \epsilon.$$

Find konstanten M (udfra funktionen $f^{(N)}$; bemærk, at M afhænger af N) og konstanten $h = |x-y|$, og bestem N sådan

$$\frac{h^N}{N!}M < \epsilon.$$