Computerstøttet beregning
Lektion 6

Repetition

Kim Knudsen

http://www.math.auc.dk/~matarne/04-csb

Interpolation

- Ide: Udfra samplede værdier af en funktion f, dvs udfra $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_N)$ for $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ at bestemme $f(x)$ på $[a, b]$.
- Lagrange-polynomium: Polynomium p defineret udfra betingelsen $p(x_k) = f(x_k)$. Nødvendig og tilstrækkkelig betingelse er, at graden af p er N.
- Lagrange basis polynomier:

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_N)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_N)}$$

Det følger, at

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} f(x_j) l_j(x).$$

Fejlestimat

- Hvor god en approksimation er Lagrange-polynomiet?
- Man kan vise, at for $x \in [a, b]$ er

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_N)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)$$

for et eller andet $\xi \in [a, b]$. Deraf følger, at

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &\leq \frac{|x - x_0||x - x_1| \cdots |x - x_N|}{(N+1)!} \|f^{(N+1)}\|_\infty \\ &\leq \frac{|b-a|^{N+1}}{(N+1)!} \|f^{(N+1)}\|_\infty. \end{aligned}$$