Computerstøttet beregning
Lektion 7

Repetition

Kim Knudsen

`http://www.math.auc.dk/~matarne/04-csb`

Splines

- Ide: Udfra samplede værdier af en funktion f, dvs udfra $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_N)$ for $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ at approksimere $f(x)$ på $[a, b]$.

- Spline s af orden m på intervallet $[a, b]$:

  1. På hvert af delintervallerne $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, er s et polynomium af grad højest m;

  2. s er $m-1$ gange differentiabel (med kontinuerte afledede op til orden $m-1$).

Splines

Af definitionen følger det, at

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1], \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_0], \\ \vdots & \vdots \\ s_{N-1} & x \in [x_{N-1}, x_N], \end{cases}$$

hvor

- funktionen s_k er polynomier af grad højest m

- og det i knudepunktet x_k gælder at

$$\begin{aligned} s_{k-1}(x_k) &= s_k(x_k) = f(x_k) \\ s_{k-1}^{(1)}(x_k) &= s_k^{(1)}(x_k) \\ s_{k-1}^{(2)}(x_k) &= s_k^{(2)}(x_k) \\ &\vdots \\ s_{k-1}^{(2)}(x_k) &= s_k^{(2)}(x_k) \\ s_{k-1}^{(m-1)}(x_k) &= s_k^{(m-1)}(x_k). \end{aligned} \tag{1}$$

Naturlig, kubisk spline

En naturlig kubisk spline er en spline af grad tre med den yderlige betingelse, at

$$s''(a) = s''(b) = 0. \tag{2}$$

Hvordan findes en naturlig, kubisk spline, som interpolerer nogle givne punkter:

$$\begin{aligned} s_0(x) &= a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 \\ s_1(x) &= a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

Ligningerne (1) og (2) giver ligningssystem for koefficienterne $a_0, b_0, \ldots$

Lineær algebra!