Computerstøttede beregninger

Lektion 8. Repetition

Kim Knudsen
kim@math.auc.dk

http://www.math.auc.dk/∼matarne/04-csb

Department of Mathematical Sciences

Aalborg University

Denmark

Numerisk integration

- Vi øsnker at beregne $\int_a^b f(x)dx$. Problem når ikke vi kan finde F sådan $F'(x) = f(x)$.
- Vi vil approksimere integralet ved hjælp af summer, dvs.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} c_k f(x_k)$$

hvor c_k er passende koefficienter eller vægte og $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_N \leq b$ er de såkaldte knudepunkter.

- En metode, der fastlægger knudepunkterne $x_k \in [a, b]$ og koefficienterne c_k rigtigt kaldes en interpolerende kvadraturregel.
- Bagvedliggende ide er at bestemme Lagrange-polynomiet p for punkterne $(x_k, f(x_k))$ og eksakt udregne

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx.$$

Derved bliver

$$c_k = \int_a^b l_k(x)dx.$$

Grad af præcision

En numerisk integrationsmetode siges at have præcisionsgrad m, hvis den er eksakt for $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^m$ men ikke eksakt for x^{m+1}.

Bemærk:

- En numerisk integrationsmetode med grad af præcision m, er eksakt for

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m;$$

- Hvis vi har besluttet os for at bruge $N+1$ knudepunkter $x_0, x_1, \ldots, x_N$, da forventer vi, at den interpolerende kvadraturregel mindst har præcisionsgrad m

Tre vigtige regler

- Midtpunktsreglen: Et knudepunkt

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

- Trapezreglen: To knudepunkter

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b));$$

- Simpsons regel: Tre knudepunkter

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)).$$

Præcisionsgrad for de tre metoder?