Taylors formel

Note til Computerstøttet Beregning

Arne Jensen
Kim Knudsen

Denne note er udarbejdet af Arne Jensen til brug i CSB i 2003 og redigeret af Kim Knudsen i 2004.

1 Introduktion

I denne note formulerer og beviser vi Taylors formel. Den spiller en vigtig rolle ved teoretiske overvejelser og praktiske beregninger i computerstøttet beregning. Et tilfælde af formlen er allerede kendt. Antag, at f er en kontinuert differentiabel funktion på et interval $I = (a, b)$. Lad $x \in (a, b)$ være fastholdt, og lad h være en lille tilvækst. Så er det velkendt, at funktionsværdien $f(x + h)$ kan approksimeres med den tilhørende værdi på tangentlinien til f gennem $(x, f(x))$, det vil sige

$$f(x + h) \approx f(x) + hf'(x).$$

Det er velkendt, at jo mindre h er jo bedre er approksimationen. Funktionen $f(x) + hf'(x)$ er for fastholdt x et førstegrads polynomium i h. Taylors formel generaliserer denne førstegrads approksimation til approksimation af funktioner med polynomier af højere grad.

Både lærebogen i Calculus fra efteråret [1] og Elbrønds bog [2] har yderligere resultater vedrørende Taylors formel. Se Section 11.4 i [1], og afsnittene 6.1 og 6.2 i [2].

2 Taylors formel

Taylors formel findes i flere varianter. Vi giver her en version, der kan bevises med helt elementære udregninger. Vi bruger notationen $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $\dots$, for første og anden afledede af f, osv. Vi minder også om, at $N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (N - 1) \cdot N$, således at $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, osv.

Sætning 2.1. *Antag, at f er en N gange kontinuert differentiabel funktion på et interval $I = (a, b)$. Lad $x \in I$ være fast, og lad h være så lille, at $x + h \in I$. Så gælder Taylors formel*

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \cdots + \frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) \\ + \frac{h^N}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1} dt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bevis. Beviset for Taylors formel består i gentagne gange delvis integration. Vi starter med at observere, at vi har

$$\frac{d}{dt} f^{(k-1)}(x+th) = h f^{(k)}(x+th).$$

Vi bruger dette resultat til gentagen delvis integration i restleddet. Vi har

$$\begin{aligned} &\frac{h^N}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1} dt \\ &\quad = \left[\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x+th)(1-t)^{N-1} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &\quad\quad - \frac{h^{N-1}}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N-1)}(x+th)(1-t)^{N-2}(N-1)(-1) dt \\ &\quad = -\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) + \frac{h^{N-1}}{(N-2)!} \int_0^1 f^{(N-1)}(x+th)(1-t)^{N-2} dt \\ &\quad = -\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) - \frac{h^{N-2}}{(N-2)!} f^{(N-2)}(x) \\ &\quad\quad + \frac{h^{N-2}}{(N-3)!} \int_0^1 f^{(N-2)}(x+th)(1-t)^{N-3} dt \\ &\quad\ \vdots \\ &\quad = -\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) - \frac{h^{N-2}}{(N-2)!} f^{(N-2)}(x) - \cdots - \frac{h}{1!} f^{(1)}(x) \\ &\quad\quad + h \int_0^1 f^{(1)}(x+th) dt. \end{aligned}$$

Det sidste trin i udregningen er da at udregne det sidste integral. Vi har

$$h \int_0^1 f^{(1)}(x+th) dt = \big[f(x+th) \big]_{t=0}^{t=1} = f(x+h) - f(x).$$

Resultatet følger derefter, hvis man flytter alle led i det sidste udtryk undtagen $f(x+h)$ over på den anden side af det første lighedstegn i udregningen. $\square$

Sætning 2.1 leder os frem til følgende definition:

Definiion 2.2. *Polynomiet i h givet ved*

$$P_{N-1}(x;h) = f(x) + \frac{h}{1!}f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x) + \cdots + \frac{h^{N-1}}{(N-1)!}f^{(N-1)}(x) \quad (2.2)$$

kaldes Taylorpolynomiet af grad $N-1$. Udtrykket

$$R_N(x;h) = \frac{h^N}{(N-1)!}\int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1}dt \quad (2.3)$$

kaldes restleddet af orden N. Tallet x i formlerne kaldes udviklingspunktet.

Der findes flere varianter af restleddet (2.3). En af dem er følgende: Til givet x og h findes et tal θ, $0 < \theta < 1$, således at

$$R_N(x;h) = \frac{h^N}{N!}f^{(N)}(x+\theta h). \quad (2.4)$$

Vi vil ikke komme ind på hvordan man udleder dette udtryk, se evt. [1, Appendix I]. Bemærk, at θ afhænger af både x og h.

I anvendelserne af Taylors formel er det vigtigt at have vurderinger for størrelsen af restleddet. Vi har følgende resultat.

Sætning 2.3. *Antag, at f opfylder betingelserne i Sætning 2.1. Antag, at der findes et $M > 0$, sådan at $|f^{(N)}(x)| \leq M$ for alle $x \in I$. Så har vi*

$$|R_N(x;h)| \leq \frac{|h|^N}{N!}M \quad (2.5)$$

for alle h, så at $x+h \in I$.

Bevis. Resultatet følger umiddelbart fra (2.4) og antagelserne, men da vi ikke har vist dette resultat, så vi viser nu, hvordan (2.5) kan udledes ud fra (2.3). Vi har

$$\begin{aligned}
|R_N(x;h)| &= \left|\frac{h^N}{(N-1)!}\int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1}dt\right| \\
&\leq \frac{|h|^N}{(N-1)!}\int_0^1 |f^{(N)}(x+th)|(1-t)^{N-1}dt \\
&\leq \frac{|h|^N}{(N-1)!}M\int_0^1 (1-t)^{N-1}dt \\
&\leq \frac{|h|^N}{(N-1)!}M\left[\frac{-1}{N}(1-t)^N\right]_{t=0}^{t=1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{|h|^N}{N!} M.$$

Hermed er resultatet vist. $\square$

Som en umiddelbar konsekvens af Sætning 2.3 ses det, at størrelsen på restleddet bliver mindre, hvis enten h gøres mindre eller hvis N gøres større. Altså er approksimationen af en funktion ved et Taylorpolynomium bedre, jo nærmere udviklingspunktet vi ser, og jo højere grad Taylorpolynomiet har.

3 Eksempler

Vi giver nu nogle eksempler på anvendelse af Taylors formel til approksimation af funktioner. Vi starter med eksponentialfunktionen $f(x) = e^x$. Vi har for denne funktion, at

$$f^{(N)}(x) = e^x$$

for alle $N \geq 1$. Det følger, at det generelle Taylorpolynomium for $x = 0$ er givet ved

$$P_{N-1}(0; h) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \cdots + \frac{1}{(N-1)!}h^{N-1}.$$

Vi vælger nu $N = 5$ og $h = 0.1$. Restleddet kan da vurderes ved

$$|R_5(0; 0.1)| \leq \frac{1}{120}(0.1)^5 e^1 \approx 2.3\,10^{-7}.$$

Taylorpolynomiet af grad fire tillader os da at beregne $e^{0.1}$ med syv betydende cifre. Vi har

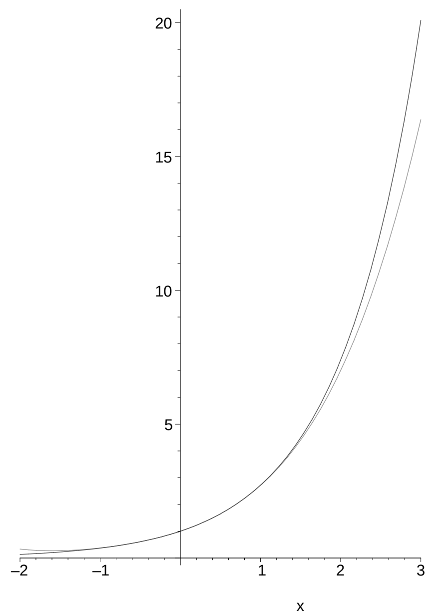
$$1 + 0.1 + \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24}(0.1)^4 \approx 1.1051708.$$

Sammenlign med hvad din lommeregner giver!

Polynomiet og eksponentialfunktionen er afbildet i Figur 1.

Det næste eksempel er med funktionen $f(x) = \sin(x)$. Vi har

$$f^{(N)}(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{for } N = 1, 5, 9, \ldots, \\ -\sin(x), & \text{for } N = 2, 6, 10, \ldots, \\ -\cos(x), & \text{for } N = 3, 7, 11, \ldots, \\ \sin(x), & \text{for } N = 4, 8, 12, \ldots. \end{cases}$$



Figur 1: Graf af e^x og $P_4(0;h)$.

Vi vælger igen udviklingspunktet $x = 0$. Taylorpolynomiet af grad seks er da givet ved

$$P_6(0;h) = h - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{120}h^5,$$

og fejlleddet kan vurderes ved

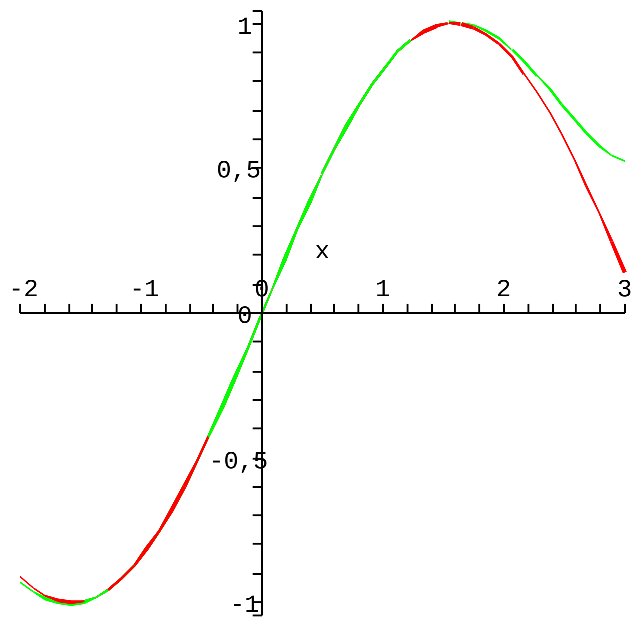
$$|R_7(0;h)| = \left|\frac{h^7}{5040}\sin(\theta)\right| \leq \frac{|h|^7}{5040}.$$

Vi har da, at

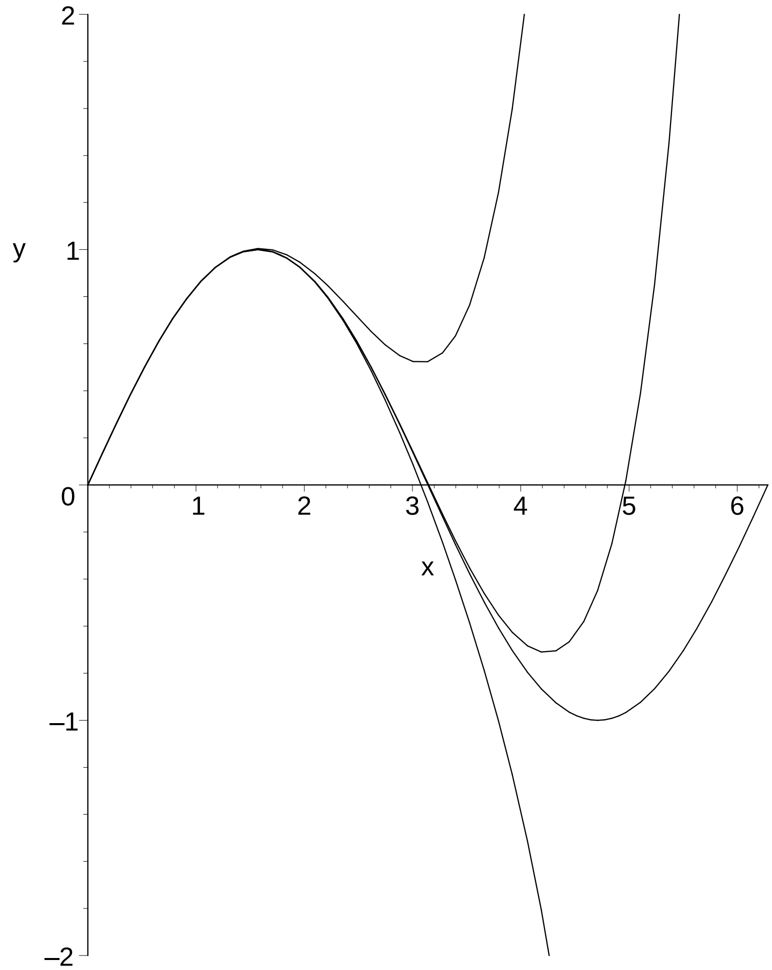
$$\begin{aligned} P_6(0;0.2) &\approx 0.19866933333333, \\ |R_7(0;0.2)| &\leq 2.539\,10^{-9}, \\ \sin(0.2) &\approx 0.19866933079506121546, \\ P_6(0;0.2) - \sin(0.2) &\approx 2.538\,10^{-9}. \end{aligned}$$

hvor den næstsidste værdi er beregnet i Maple med `Digits:=20`.

Både $\sin(h)$ og $P_6(0,h)$ er afbildet i Figur 2. I Figur 3 har vi afbildet grafen for $\sin(h)$ på intervallet $[0, 2\pi]$, sammen med Taylorpolynomierne af grad 6, 8 og 10. Man ser, at højere grad giver bedre approksimation.



Figur 2: Graf af $\sin(x)$ og $P_6(0; h)$.



Figur 3: Graf af $\sin(h)$, $P_6(0;h)$, $P_8(0;h)$, og $P_{10}(0;h)$.

4 Opgaver

Opgave 1 Gennemfør detaljerne i eksemplet med $f(x) = e^x$.

Opgave 2 Gennemfør detaljerne i eksemplet med $f(x) = \sin(x)$.

Opgave 3 Bestem Taylorpolynomiet af grad 6 for $f(x) = \cos(x)$, med udviklingspunkt $x = 0$. Brug det til at bestemme $\cos(-0.2)$, og giv en vurdering af fejlen.

Opgave 4 Bestem Taylorpolynomiet af grad 4 for funktionen $f(x) = \ln(x)$, med udviklingspunkt $x = 1$. Brug det til at bestemme $\ln(0.7)$. Giv en vurdering af fejlen.

Opgave 5 Man kan ved numeriske eksperimenter vise, at fejlleddet er af den størrelsesorden, som Taylors formel angiver. I denne opgave vil vi bruge Taylorpolynomier af grad 2, 4, og 6, for at approksimere $\sin(x)$ nær nul. Vi bruger et logaritmisk-logaritmisk plot for at se potensopførselen, og beregner eksponenten som hældningskoefficient af liniestykkerne. Stemmer tallene med det man forventer fra Taylors formel? Hvis ikke, forklar hvorfor. Maple kommandoerne er her og findes også i filen l03opgaver.mw på kursets hjemmeside.

```
> restart;with(plots):
```

Taylorpolynomium af grad 2,4,6 for sin(x) med udviklingspunkt x=0

```
> p2 := x-> x;
> p4 := x-> x-1/6*x^3;
> p6 := x-> x-1/6*x^3+1/120*x^5;
```

De tilhørende restled

```
> fejl2:= x-> abs(sin(x)-p2(x));
> fejl4:= x-> abs(sin(x)-p4(x));
> fejl6:= x-> abs(sin(x)-p6(x));
```

Dobbeltlogaritmisk plot af fejlen

```
> loglogplot([fejl2(x),fejl4(x),fejl6(x)],x=0.1..0.4);
```

Forklar dette plots udseende. Vi beregner nu hældningerne

```
> slope1:=(log(fejl2(0.4))-log(fejl2(0.1)))/(log(0.4)-log(0.1));
> slope2:=(log(fejl4(0.4))-log(fejl4(0.1)))/(log(0.4)-log(0.1));
> slope3:=(log(fejl6(0.4))-log(fejl6(0.1)))/(log(0.4)-log(0.1));
```

Opgave 6 Lav udregninger svarende til dem i Opgave 5 for eksponentialfunktionen. Prøv Taylorpolynomier af forskellig grad.

Litteratur

[1] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Calculus*, Sixth Edition, Prentice Hall, 2002.

[2] H. E. Jensen, P. Hjorth, S. Markvorsen, and W. Kliem, *Matematisk Analyse 1*, 4. udgave, Institut for Matematik, 1998.