Problem 1. Betragt følgende system af ligninger:

$$\begin{cases} x_1^4 + x_2^3 = 1 + t, \\ x_2^4 + x_1 x_2 = 3t - 1. \end{cases} \tag{1}$$

a). Vis, at $(x_1, x_2, t) = (1, 1, 1)$ er en løsning.

b). Vis, at der findes et åbent interval T_0, der indeholder 1, sådan at ligning (1) har en entydig løsning $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ defineret for $t \in T_0$, der opfylder betingelserne $(x_1(1), x_2(1)) = (1, 1)$ og komponenterne x_q er C^1 funktioner på T_0.

c). Udregn $x_1'(1)$ og $x_2'(1)$.

Problem 2. Find løsningen $u(x, t)$ i $0 \leq x \leq \pi$ og $t \geq 0$ af følgende P.D.E.:

$$u_t - 5u_{xx} = t^2 \sin(2x) ,$$

idet det er givet , at $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ og $u(x, 0) = \sin(5x)$.

Problem 3. Lad a være et reelt tal. Følgen af funktioner $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, er defineret ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-nx), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Udregn den punktvise grænseværdi af denne følge.
2. Konvergerer følgen uniformt?

Problem 4. Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{\sin^2(\pi z/2)}{z^2(z - 1)}.$$

1. Vis, at f er meromorph, og udregn residuer.
2. Udregn integralet

$$\int_{|z|=2} f(z)dz.$$

Horia Cornean