Opgave 1. Betragt følgende system af ligninger:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4t - 2, \\ x_2^4 + x_1 x_2 = 2t. \end{cases} \tag{1}$$

a). Vis, at $(x_1, x_2, t) = (1, 1, 1)$ er en løsning.

b). Vis, at der findes et åbent interval T_0, der indeholder 1, sådan at ligning (1) har en entydig løsning $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ defineret for $t \in T_0$, der opfylder betingelserne $(x_1(1), x_2(1)) = (1, 1)$ og komponenterne x_q er C^1 funktioner på T_0.

c). Udregn $x_1'(1)$ og $x_2'(1)$.

Opgave 2. Find Fourier sinus expansion af følgende funktion:

$$f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(7x) \ .$$

Vink: $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

Opgave 3. Følgen af funktioner $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, er defineret ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{n} + \frac{1+n}{3+n}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Udregn den punktvise grænseværdi af denne følge.
2. Konvergerer følgen uniformt?

Opgave 4. Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.$$

1. Vis, at f er meromorf, og udregn residuer.
2. Betragt $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \frac{1}{2}\exp(2\pi i t)$. Udregn integralet

$$\int_\gamma f.$$