

Opgave 1. Betragt følgende system af ligninger:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 + t, \\ x_2^4 + x_1 x_2 = 3t - 1. \end{cases} \quad (1)$$

a). Vis, at $(x_1, x_2, t) = (1, 1, 1)$ er en løsning.

b). Vis, at der findes et åbent interval T_0 , der indeholder 1, sådan at ligning (1) har en entydig løsning $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ defineret for $t \in T_0$, der opfylder betingelserne $(x_1(1), x_2(1)) = (1, 1)$ og komponenterne x_q er C^1 funktioner på T_0 .

c). Udregn $x'_1(1)$ og $x'_2(1)$.

Opgave 2. Find Fourier sinus expansion af følgende funktion:

$$f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(5x) \sin(x).$$

Vink: $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$.

Opgave 3. Følgen af funktioner $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, er defineret ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n+x}{n^2} + \sin(x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

1. Udregn den punktwise grænseværdi af denne følge.
2. Konvergerer følgen uniformt?

Opgave 4. Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z/4)}{z(z-1)}.$$

1. Vis, at f er meromorf, og udregn residuer.
2. Betragt $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2 \exp(2\pi i t)$. Udregn integralet

$$\int_{\gamma} f.$$

Opgave 5. Betragt $B := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Find $\max f$ og $\min f$ for $f : B \mapsto \mathbb{R}$ hvor

$$f(\mathbf{x}) = -8x_1^2 + x_2^2.$$