Opgave 1. Betragt følgende system af ligninger:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 + t, \\ x_2^4 + x_1 x_2 = 3t - 1. \end{cases} \tag{1}$$

a). Vis, at $(x_1, x_2, t) = (1, 1, 1)$ er en løsning.

b). Vis, at der findes et åbent interval T_0, der indeholder 1, sådan at ligning (1) har en entydig løsning $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ defineret for $t \in T_0$, der opfylder betingelserne $(x_1(1), x_2(1)) = (1, 1)$ og komponenterne x_q er C^1 funktioner på T_0.

c). Udregn $x_1'(1)$ og $x_2'(1)$.

Opgave 2. Find Fourier udvikling af følgende funktion:

$$f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(5x)\sin(x)\ .$$

Vink: $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Opgave 3. Følgen af funktioner $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, er defineret ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n+x}{n^2} + \sin(x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Udregn den punktvise grænseværdi af denne følge.
2. Konvergerer følgen uniformt?

Opgave 4. Betragt den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z/4)}{z(z-1)^2}.$$

1. Vis, at f er meromorf i $\mathbb{C}$.
2. Betragt $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2\exp(2\pi i t)$. Udregn integralet

$$\int_\gamma f(z)dz.$$