

Matematik 2 – Forår 2004

Vektorrum og Metriske Rum

2. kursusgang

Opgaver

Regn nedenstående opgaver. De omhandler uendelige rækker med komplekse led.

1. Overvej, at definitionen af konvergens for en uendelig række også kan anvendes på rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad \text{hvor } z_n \in \mathbf{C}.$$

2. Overvej, at for $q \in \mathbf{C}$ gælder, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ er konvergent, hvis og kun hvis $|q| < 1$. Hvis rækken er konvergent, så er summen lig $1/(1-q)$ (bemærk at summation starter med $n = 0$).
3. Overvej, at begrebet absolut konvergens giver mening for en række med komplekse led, og at absolut konvergens medfører konvergens. Dette betyder at kriterierne for konvergens af reelle rækker med ikke-negative led kan anvendes til at afgøre absolut konvergens for komplekse rækker.
4. For hver af følgende rækker skal afgøres, om den er konvergent eller divergent.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{in}{1+in}.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2i)^n}.$

5. For hver af følgende rækker skal afgøres, om den er absolut konvergent eller divergent.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+in}.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7-5in}{3+in+n^2}.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{1+in^4}.$