Matematik 2 – Forår 2004
Reelle og Komplekse Funktioner

---

6. kursusgang
Opgaver

Kommentarer Nedenstående Opgave 1 giver en meget grov vurdering af størrelsen af $N!$ for store N. Der findes mere præcise resultater. Et af dem er en formel, kaldet *Stirling's formel*:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi}N^{N+\frac{1}{2}}e^{-N}} = 1.$$

Beviset kan findes in Wade, se Theorem 12.74.

Opgaverne 2 og 3 nedenfor er eksempler på mulige eksamensopgaver, hvor man skal anvende teorien, snarere end at regne på en konkret potensrække.

1. I denne opgave skal vi forsøge at finde en vurdering af $N!$ for store N.

   (a) Vis $\log(N!) = \sum_{n=2}^{N} \log(n)$.

   (b) Ved at sammenligne integralet

   $$\int_1^N \log(x)dx$$

   med en oversum og en undersum skal man vise ulighederne

   $$\sum_{n=2}^{N-1} \log(n) \leq \int_1^N \log(x)dx \leq \sum_{n=2}^{N} \log(n).$$

   Idé: Tegn!

   (c) Slut af foregående uligheder, at vi har

   $$\int_1^N \log(x)dx \leq \sum_{n=2}^{N} \log(n) \leq \int_1^{N+1} \log(x)dx.$$

   (d) Beregn integralerne ovenfor for at vise

   $$N\log(N) - N \leq \sum_{n=2}^{N} \log(n) \leq (N+1)\log(N+1) - N.$$

(e) Slut heraf, at vi har ulighederne

$$N^N e^{-N} \leq N! \leq (N+1)^{N+1} e^{-N}$$

og

$$N e^{-1} \leq (N!)^{1/N} \leq (N+1)^{1+\frac{1}{N}} e^{-1}.$$

2. Det er givet, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergensradius $R = 2$. Bestem konvergensradius for følgende tre potensrækker, hvor $k > 0$ er et heltal.

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x^n, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x^{n^2}.$$

3. Det er givet, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er konvergent for $x = 5$, og divergent for $x = -7$. Angiv en øvre og nedre grænse for dens konvergensradius R. Mere detaljeret, vedrørende den nedre grænse, find et tal a, så at enten $a < R$ eller $a \leq R$. Svarene skal begrundes.