Noter til
Computerstøttet Beregning
Taylors formel

Arne Jensen

1 Introduktion

I disse noter formulerer og beviser vi Taylors formel. Den spiller en vigtig rolle ved teoretiske overvejelser, og også praktiske beregninger, i computerstøttet beregning. Et tilfælde af formlen er allerede kendt. Antag, at f er en kontinuert differentiabel funktion på et interval $I = (a, b)$. Lad $x \in (a, b)$ være fastholdt, og lad h være en lille tilvækst. Så er det velkendt, at funktionsværdien $f(x + h)$ kan approksimeres med den tilhørende værdi på tangentlinien til f gennem $(x, f(x))$. Denne værdi er

$$f(x) + f'(x)h.$$

Dette er et førstegrads polynomium i h. Taylors formel generaliserer dette til polynomier af højere grad.

Både lærebogen i Calculus fra efteråret [1] og Elbrønds bog [2] har yderligere resultater vedrørende Taylors formel. Se Section 11.4 i [1], og afsnittene 6.1 og 6.2 i [2].

2 Taylors formel

Taylors formel findes i flere varianter. Vi giver her en version, der kan bevises med helt elementære udregninger. Vi bruger notationen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots,$ for første og anden afledede af f, osv. Vi minder også om, at $N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N$, således at $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, osv.

Sætning 2.1. *Antag, at f er en N gange kontinuert differentiabel funktion på et interval $I = (a, b)$. Lad $x \in I$ være fast, og lad h være så lille, at $x + h \in I$. Så* *gælder Taylors formel*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \cdots + \frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) + \frac{h^N}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1} dt. \tag{2.1}$$

Definition 2.2. *Polynomiet i h givet ved*

$$P_{N-1}(x;h) = f(x) + \frac{h}{1!} f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \cdots + \frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) \tag{2.2}$$

kaldes Taylor polynomiet af grad $N-1$. Udtrykket

$$R_N(x;h) = \frac{h^N}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1} dt \tag{2.3}$$

kaldes restleddet af orden N. Tallet x i formlerne kaldes udviklingspunktet.

Bevis. Beviset for Taylors formel består i gentagne gange delvis integration. Vi starter med at observere, at vi har

$$\frac{d}{dt} f^{(k-1)}(x+th) = h f^{(k)}(x+th).$$

Vi bruger dette resultat til gentagen delvis integration i restleddet. Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{h^N}{(N-1)!} &\int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1} dt \\
&= \left[\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x+th)(1-t)^{N-1} \right]_{t=0}^{t=1} \\
&\quad - \frac{h^{N-1}}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N-1)}(x+th)(1-t)^{N-2}(N-1)(-1) dt \\
&= -\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) + \frac{h^{N-1}}{(N-2)!} \int_0^1 f^{(N-1)}(x+th)(1-t)^{N-2} dt \\
&= -\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) - \frac{h^{N-2}}{(N-2)!} f^{(N-2)}(x) \\
&\quad + \frac{h^{N-2}}{(N-3)!} \int_0^1 f^{(N-2)}(x+th)(1-t)^{N-3} dt \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

$$= -\frac{h^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N-1)}(x) - \frac{h^{N-2}}{(N-2)!} f^{(N-2)}(x) - \cdots - \frac{h}{1!} f^{(1)}(x)$$
$$+ h \int_0^1 f^{(1)}(x+th)dt.$$

Det sidste trin i udregningen er da at udregne det sidste integral. Vi har

$$h \int_0^1 f^{(1)}(x+th)dt = \big[f(x+th)\big]_{t=0}^{t=1} = f(x+h) - f(x).$$

Resultatet følger derefter, hvis man flytter alle led i det sidste udtryk undtagen $f(x+h)$ over på den anden side af det første lighedstegn i udregningen. □

Der findes flere varianter af restleddet (2.3). En af dem er følgende: Til givet x og h findes et tal θ, $0 < \theta < 1$, således at

$$R_N(x; h) = \frac{h^N}{N!} f^{(N)}(x + \theta h). \tag{2.4}$$

Vi vil ikke komme ind på hvordan man udleder dette udtryk. Bemærk, at θ afhænger af både x og h.

I anvendelserne af Taylors formel er det vigtigt at have vurderinger for størrelsen af restleddet. Vi har følgende resultat.

Sætning 2.3. *Antag, at f opfylder betingelserne i Sætning 2.1. Antag, at der findes et $M > 0$, sådan at $|f^{(N)}(x)| \leq M$ for alle $x \in I$. Så har vi*

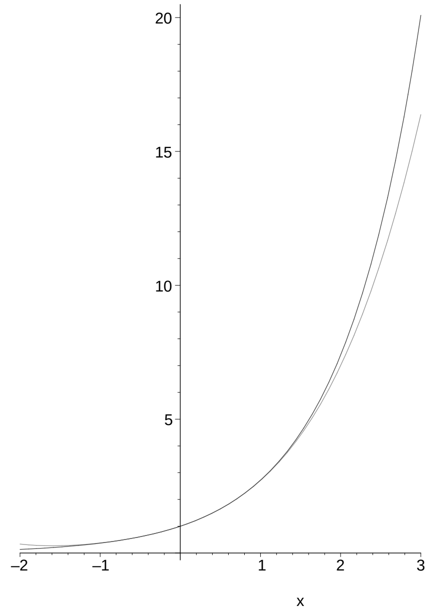
$$|R_N(x; h)| \leq \frac{|h|^N}{N!} M \tag{2.5}$$

for alle h, så at $x + h \in I$.

Bevis. Resultatet følger umiddelbart fra (2.4) og antagelserne. Men vi har ikke vist dette resultat, så vi viser nu, hvordan (2.5) kan udledes ud fra (2.3). Vi har

$$\begin{aligned} |R_N(x; h)| &= \left| \frac{h^N}{(N-1)!} \int_0^1 f^{(N)}(x+th)(1-t)^{N-1}dt \right| \\ &\leq \frac{|h|^N}{(N-1)!} \int_0^1 |f^{(N)}(x+th)|(1-t)^{N-1}dt \\ &\leq \frac{|h|^N}{(N-1)!} M \int_0^1 (1-t)^{N-1}dt \\ &\leq \frac{|h|^N}{(N-1)!} M \left[\frac{-1}{N}(1-t)^N \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{|h|^N}{N!} M. \end{aligned}$$

Hermed er resultatet vist. □



Figur 1: Graf af e^x og $P_4(0; h)$.

3 Eksempler

Vi giver nu nogle eksempler på anvendelse af Taylors formel til approksimation af funktioner. Vi starter med eksponentialfunktionen $f(x) = e^x$. Vi har for denne funktion, at

$$f^{(N)}(x) = e^x$$

for alle $N \geq 1$. Det følger, at det generelle Taylor polynomium for $x = 0$ er givet ved

$$P_{N-1}(0; h) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \cdots + \frac{1}{(N-1)!}h^{N-1}.$$

Vi vælger nu $N = 5$ og $h = 0.1$. Fejlleddet kan da vurderes ved

$$\frac{1}{120}(0.1)^5 e^1 \approx 2.3\,10^{-7}.$$

Taylorplynomiet af grad fire tillader os da at beregne $e^{0.1}$ med syv betydende cifre. Vi har

$$1 + 0.1 + \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{6}(0.1)^3 + \frac{1}{24}(0.1)^4 \approx 1.1051708.$$

Sammenlign med hvad din lommeregner giver!

Polynomiet og eksponentialfunktionen er afbildet i Figur 1.

Det næste eksempel er med funktionen $f(x) = \sin(x)$. Vi har

$$f^{(N)}(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{for } N = 1, 5, 9, \ldots, \\ -\sin(x), & \text{for } N = 2, 6, 10, \ldots, \\ -\cos(x), & \text{for } N = 3, 7, 11, \ldots, \\ \sin(x), & \text{for } N = 4, 8, 12, \ldots. \end{cases}$$

Vi vælger igen udviklingspunktet $x = 0$. Taylorpolynomiet af grad fem er da givet ved

$$P_5(0; h) = h - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{120}h^5,$$

og fejlleddet kan vurderes ved

$$|R_6(0; h)| = \left| \frac{h^6}{720} \sin(\theta) \right| \le \frac{|h|^6}{720}.$$

Vi har da, at

$$\begin{aligned} P_5(0; 0.2) &\approx 0.19866933333333, \\ |R_6(0; 0.2)| &\le 8.8\,10^{-8}, \\ \sin(0.2) &\approx 0.19866933079506, \\ \sin(0.2) &\approx 0.19866933079506121546 \end{aligned}$$

hvor den næstsidste værdi er beregnet ved hjælp af Matlabs indbyggede algoritme, og den sidste værdi i Maple med `Digits:=20`.

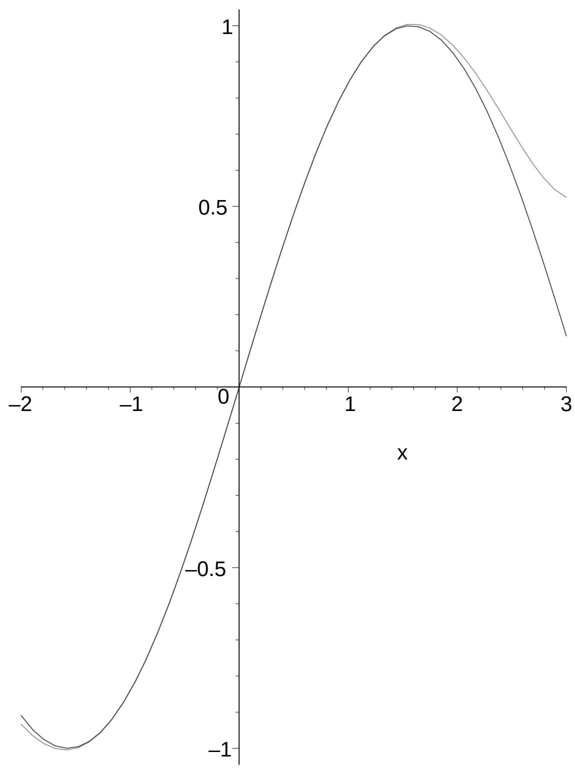
Både $\sin(x)$ og $P_5(0, h)$ er afbildet i Figur 2. I Figur 3 har vi afbildet grafen for $sin(x)$ på intervallet $[0, 2\pi]$, sammen med Taylor polynomierne af grad 5, 7 og 9. Man ser, at højere grad giver bedre approksimation.

4 Opgaver

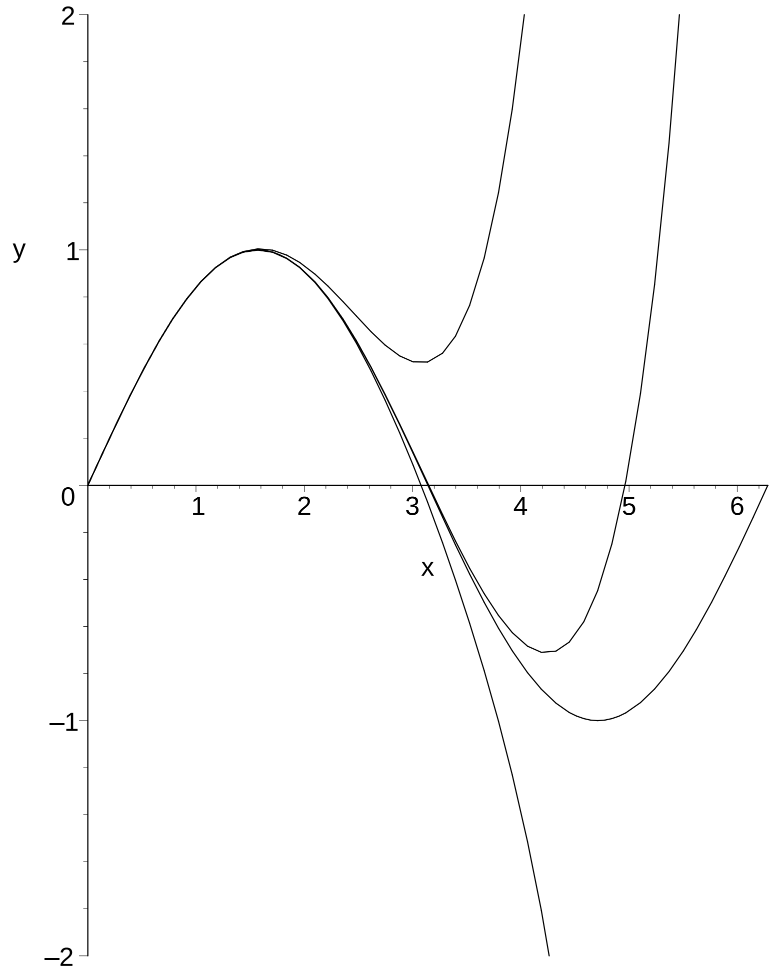
Opgave 1 Gennemfør detaljerne i eksemplet med $f(x) = e^x$.

Opgave 2 Gennemfør detaljerne i eksemplet med $f(x) = \sin(x)$.

Opgave 3 Bestem Taylorpolynomiet af grad 6 for $f(x) = \cos(x)$, med udviklingspunkt $x = 0$. Brug det til at bestemme $\cos(-0.2)$, og giv en vurdering af fejlen.



Figur 2: Graf af $\sin(x)$ og $P_5(0; h)$.



Figur 3: Graf af $\sin(x)$, $P_5(0;h)$, $P_7(0;h)$, og $P_9(0;h)$.

Opgave 4 Bestem Taylorpolynomiet af grad 4 for funktionen $f(x) = \ln(x)$, med udviklingspunkt $x = 1$. Brug det til at bestemme $\ln(0.7)$. Giv en vurdering af fejlen.

Opgave 5 Man kan vise ved numeriske eksperimenter, at fejlleddet er af den størrelsesorden, som Taylors formel angiver. Her er et eksempel, hvor vi bruger Taylor polynomier af grad 2, 4, og 6, for at approksimere $\sin(x)$ nær nul. Vi bruger et logaritmisk-logaritmisk plot for at se potensopførselen, og beregner eksponent som hældningskoefficient af liniestykkerne. Stemmer tallene med det man forventer fra Taylors formel? Hvis ikke, forklar hvorfor. MATLAB filen er her, og findes også på kursets hjemmeside.

```
% CSB
% beregning af orden af fejl i Taylor approksimation.
format long
p2=[ 1,0];
p4=[ -1/6,0, 1,0];
p6=[1/120, 0, -1/6,0, 1,0];
x=0.01:0.01:0.4;
appr2=polyval(p2,x);
appr4=polyval(p4,x);
appr6=polyval(p6,x);
ext=sin(x);
fejl2=abs(appr2-ext);
fejl4=abs(appr4-ext);
fejl6=abs(appr6-ext);
figure
loglog(x,fejl2,x,fejl4,x,fejl6)
slope2=(log(fejl2(40))-log(fejl2(1)))/(log(x(40))-log(x(1)))
slope4=(log(fejl4(40))-log(fejl4(1)))/(log(x(40))-log(x(1)))
slope6=(log(fejl6(40))-log(fejl6(1)))/(log(x(40))-log(x(1)))
```

Opgave 6 Lav udregninger svarende til dem i Opgave 5 for eksponentialfunktionen. Prøv Taylor polynomier af forskellig grad.

Litteratur

[1] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Calculus*, Sixth Edition, Prentice Hall, 2002.

[2] H. E. Jensen, P. Hjorth, S. Markvorsen, and W. Kliem, *Matematisk Analyse 1*, 4. udgave, Institut for Matematik, 1998.