Det teknisk-naturvidenskabelige basisår
Matematik 1A, Efterår 2005, Hold 3
Prøveopgave A

Opgaven består af tre dele, hver med en række spørgsmål, efterfulgt af en liste af teorispørgsmål. I alle opgavespørgsmålene må man gerne bruge Maple, lommeregner osv. til hjælp med udregningerne.

Sidst i hver del er der også nogle åbne spørgsmål, som man kan tage med, hvis der er tid til det.

Del I

Vi skal først se på kurver defineret ved hjælp af polære koordinater.

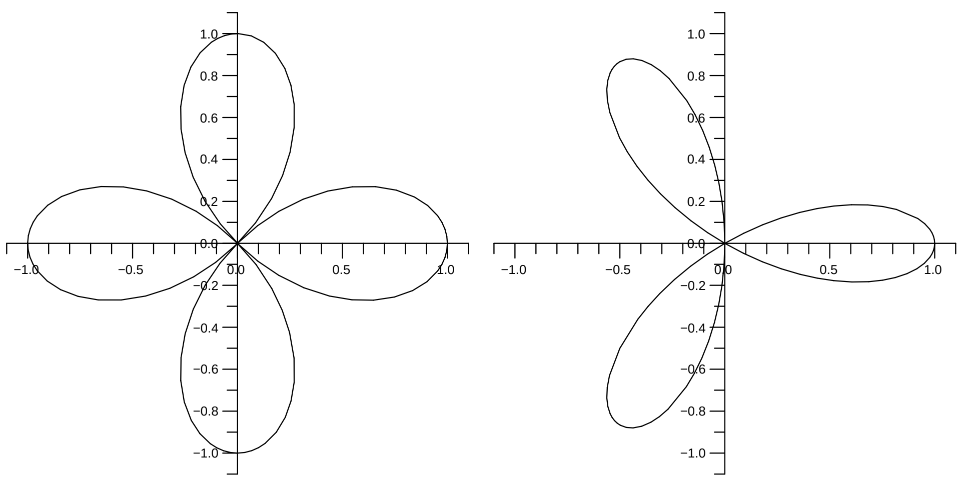
1. Betragt først kurverne givet ved ligningerne

$$r = \cos(2\theta) \tag{1}$$

og

$$r = \cos(3\theta). \tag{2}$$

Graferne er givet i Figur 1. Identificér de to kurver. Vi lader θ gennemløbe



Figur 1: De to kurver $r = \cos(3\theta)$ og $r = \cos(2\theta)$

et interval $0 \leq \theta \leq T$. Angiv for hver af de to kurver den mindste værdi af T, således at kurven gennemløbes præcis én gang. Man kan se på de værdier af θ, hvor der gælder $r(\theta) = 1$ eller $r(\theta) = -1$. Vi kalder kurverne roser med henholdsvis 3 og 4 blade.

2. Vi generaliserer nu til at se på kurver givet ved en ligning

$$r = \cos(n\theta) \quad \text{hvor } n \text{ er et naturligt tal.} \tag{3}$$

Gør rede for, at for n **lige** er kurven en rose med $2n$ blade, mens for n **ulige** er kurven en rose med n blade. For en given værdi af n skal man bestemme et T, således at kurven gennemløbes præcis én gang, når θ gennemløber intervallet fra 0 til T.

3. Betragt nu rosen givet ved (1). Man kan vise, at krumningen er givet ved

$$\kappa(\theta) = \frac{5 + 3\sin^2(2\theta)}{(1 + 3\sin^2(2\theta))^{3/2}}. \tag{4}$$

Brug denne formel til at bestemme krumningen i spidsen af et blad.

4. Forklar hvordan man skal bære sig ad med at udlede formlen (4), baseret på teorien for krumning af plane kurver.

Bemærkning: Man kan udlede (4) ved at bruge Maple, kombineret med brug af trigonometriske formler (Maple finde ikke af sig selv ovenstående formel). Det må man gerne gøre.

Åbne spørgsmål. Man kan generalisere til kurver af formen

$$r = \cos(\tfrac{p}{q}\theta), \tag{5}$$

hvor $\frac{p}{q}$ er en uforkortelig brøk. Kurverne bliver mere komplicerede. Prøv at tegne nogle stykker, og beskriv deres forløb. Endnu mere generelt kan man se på tilfældet, hvor

$$r = \cos(a\theta), \tag{6}$$

hvor a er et irrationalt tal. Prøv for eksempel at tegne forløbet af en sådan kurve i Maple for $a = \sqrt{2}$.

Del II

I denne del af opgaven ser vi på nogle anvendelser af Taylors formel med restled.

5. Vi betrager funktionen $\arctan(x)$. Taylors formel med udviklingpunkt $x = 0$ kan skrives som

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x). \tag{7}$$

I denne opgave skal vi udlede formlen med et restled på integral form. Start med at vise, at for $t \neq 1$ har vi

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}. \tag{8}$$

Sæt nu $t = -y^2$. Det giver

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k y^{2k} = \frac{1 + (-1)^n y^{2n+2}}{1 + y^2}.$$

Slut heraf, at (7) gælder, med udtrykket

$$R_{2n+1}(x) = -\int_0^x \frac{(-1)^n y^{2n+2}}{1 + y^2} dy.$$

Vis ved hjælp af dette udtryk vurderingen

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{2n+3} |x|^{2n+3} \tag{9}$$

Bemærkning: Se også Edwards and Penney, side 711–713.

6. Vi har, at $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Vi kan derfor bruge resultaterne (7) og (9) til at bestemme et n, således at vi finder π med 4 korrekte decimaler. Hvor stor skal n være, for at vi kan være sikker på at have 4 korrekte decimaler?

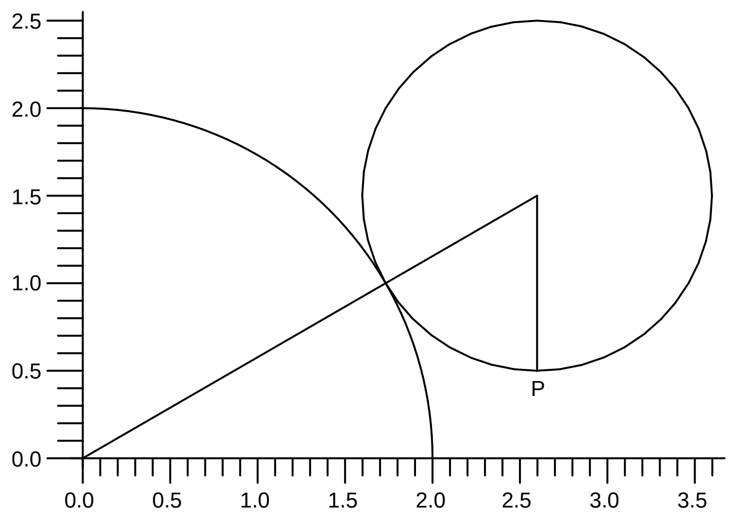
Åbne spørgsmål. For at få en hurtigere (og bedre?) approksimation til π kan man bruge formlen

$$\arctan(\tfrac{1}{2}) + \arctan(\tfrac{1}{3}) = \frac{\pi}{4},$$

se Opgave 64 i afsnit 7 i Edwards and Penney, side 476. Hvor mange led skal man bruge for at være sikker på at få beregnet π med 4 korrekte decimaler denne gang?

Del III

Vi skal nu se på en parametriseret kurve i planen, som beskriver bevægelsen af et punkt. Til tiden $t = 0$ har punktet P koordinaterne $(2, 0)$ i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Punktet P er berøringspunktet mellem en cirkel med centrum $(0, 0)$ og radius 2, og en cirkel med centrum $(3, 0)$ og radius 1. Punktet ligger fast på den ydre cirkel, som nu ruller uden at glide på den indre cirkel i positiv opløbsretning. Til tiden t er vinklen mellem x-aksen og linien fra origo til centrum af den lille ydre cirkel t radianer. Se Figur 2, som viser positionen til tiden $t = \frac{\pi}{6}$.



Figur 2: Punktet P til tiden $t = \frac{\pi}{6}$

7. Vis, at parameterfremstillingen for punktets bevægelse er givet ved

$$x(t) = 3\cos(t) - \cos(3t), \tag{10}$$
$$y(t) = 3\sin(t) - \sin(3t). \tag{11}$$

Man kan bruge geometriske betragtninger til dette.

8. Lav en tegning, der viser kurvens forløb, når t løber fra 0 til 2π. På grund af det nyreformede udseende kaldes kurven en *nefroide*, efter det græske ord for nyre.

9. Beregn hastighedsvektor og accelerationsvektor for bevægelsen. Vis, at tangentvektoren til punktet P på kurven er vinkelret på linien, der forbinder berøringspunktet mellem de to cirkler til tiden t med punktet P.

10. Beregn kurvelængden af nefroiden. I beregningen af længden af hastighedsvektoren skal man bruge en række af de trigonometriske formler, inklusive additionsformler og dobbeltvinkel formler. Resultatet af disse udregninger er, at

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 6|\sin(t)|.$$

Åbne spørgsmål. Hvis vi nu antager, at radius af den ydre rullende cirkel er den samme som radius af den faste indre cirkel, hvilken kurve beskrives så af punktet P? Find en parameterfremstilling for denne kurve. Identificér den som en af de polære kurver fra Edwards and Penney.

Teorispørgsmål.

Til denne opgave hører følgende emner fra teorien.

1. Inverse trigonometriske funktioner og deres afledede.
2. Taylorpolynomier.
3. Taylors formel med restled.
4. Parametriserede kurver i planen og rummet. Hastighed og acceleration.
5. Buelængde for kurver i planen og rummet.
6. Parametrisering af kurve ved buelængde.
7. Krumning af plane kurver.
8. Glat kurve, enhedstangentvektor, normalvektor og krumningscirkel.