Det teknisk-naturvidenskabelige basisår
Matematik 1A, Efterår 2005, Hold 3
Prøveopgave C

Opgaven består af tre dele, hver med en række spørgsmål, efterfulgt af en liste af teorispørgsmål. I alle opgavespørgsmålene må man gerne bruge Maple, lommeregner osv. til hjælp med udregningerne.

Sidst i hver del er der også nogle åbne spørgsmål, som man kan tage med, hvis der er tid til det.

Del I

Vi skal først se på sammenhængen mellem de komplekse tal og punkter i planen. Som sædvanlig identificerer vi det komplekse tal $z = x + iy \in \mathbf{C}$ med punktet $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ i planen.

1. Beskriv følgende delmængder af komplekse tal som punktmængder i planen, ved hjælp af en ligning i x og y, og identificér hver af dem med velkendte geometriske figurer. I den forbindelse kan man fortolke $|z - w|$ som afstanden mellem de to komplekse tal z og w, identificeret med punkter i planen.

(i) $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(az + b) = 0\}$, hvor $a, b \in \mathbf{C}$ er given komplekse tal.

(ii) $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - i| = |z + 2|\}$. Tegn i den komplekse plan.

(iii) $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 2\,|z - 1|\}$. Tegn i den komplekse plan.

Åbne spørgsmål. Der er mange andre geometriske figurer, som er beskrevet ved komplekse ligninger. Undersøg en eller flere af følgende muligheder:

(a) $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| = |z - b|\}$, hvor $a, b \in \mathbf{C}$ er to forskellige komplekse tal, dvs. $a \neq b$.

(b) Vis, at $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - \alpha| + |z + \alpha| = R\}$ er en ellipse, hvis R er stor nok. Her er $\alpha > 0$ er positivt reelt tal.

(c) Generaliser del (b) til $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| + |z - b| = R\}$, hvor $a, b \in \mathbf{C}$ er givne komplekse tal og R igen er stor nok.

Del II

Vi skal nu se på rødder i polynomier med komplekse koefficienter.

2. Bestem rødderne i tredjegradspolynomiet

$$z^3 - 27i = 0.$$

3. Bestem rødderne i andengradspolynomiet

$$w^2 + (2-i)w - 2i = 0.$$

4. Vis, at $z = -2i$ er en rod i polynomiet

$$z^5 + 2iz^4 + (2-i)z^3 + (2+4i)z^2 - 2iz + 4.$$

Bestem derefter alle fem rødder i dette polynomium, og afsæt dem i den komplekse plan.

Åbne spørgsmål. Der er givet et polynomium af grad n

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0. \tag{1}$$

Antag, at alle koefficienterne a_j, $j = 0, \ldots, n$ er hele tal. Antag, at polynomiet $P(z)$ har en rod z_0, som er et rationalt tal, dvs. $z_0 = \frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal, og at brøken er uforkortelig. Vis, at der så nødvendigvis må gælde, at a_n er delelig med q, og samtidig, at a_0 er delelig med p. Det giver en metode til at undersøge, om et givet polynomium har reelle rationale rødder. Afprøv metoden på polynomiet

$$3z^3 - 2z^2 + 12z - 8.$$

Bestem alle rødder i dette polynomium.

Del III

Vi skal nu se på en række spørgsmål vedrørende differentialligninger og deres løsninger. Vi ser på en ligning

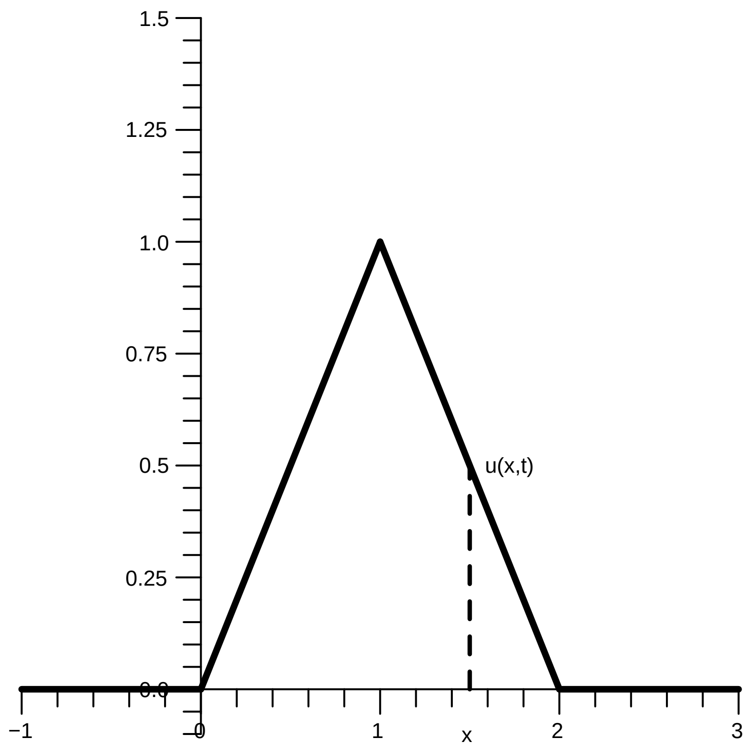
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0. \tag{2}$$

Her er c en fast reel konstant. Ligningen (2) kaldes en *partiel* differential ligning, da den ukendte funktion har to variable, og ligningen involverer de partielle afledede efter disse to variable.

Ligningen (2) kaldes bølgeligningen. Vi skal se på en række egenskaber ved den. Vi antager i det følgende, at alle funktionerne er to gange differentiable.

5. Antag, at $u_1(x,t)$ og $u_2(x,t)$ begge er løsninger til (2). Vis, at så er linearkombinationen $u(x,t) = c_1 u_1(x,t) + c_2 u_2(x,t)$ også en løsning. Overvej, at dette resultat også gælder for komplekse funktioner u_1 og u_2, og komplekse konstanter c_1 og c_2.

En løsning til bølgeligningen beskriver (idealiseret) svingninger i en uendelig streng. Værdien $u(x,t)$ til tiden t angiver udsvinget på position x, se Figur 1. Vi vil nu forsøge at finde løsninger til (2).



Figur 1: Graf af $u(x,t)$ til tiden t.

6. Vi gætter på en kompleks funktion

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t},$$

hvor α og β er komplekse konstanter. Vis, at hvis $u(x,t)$ er en løsning til (2), så må der gælde, at

$$\beta^2 = c^2 \alpha^2.$$

Det er et rimeligt krav at forlange, at funktionen $u(x,t)$ er begrænset, dvs. at der findes en konstant $M > 0$, således at for alle x og t gælder, at $|u(x,t)| \leq$

M. Vis, at det leder til betingelserne $\operatorname{Re}\alpha = 0$ og $\operatorname{Re}\beta = 0$. Sæt $\alpha = ik$, hvor k er en reel konstant, og konkluder, at vi har fundet fire familier af reelle løsninger

$$\cos(k(x+ct)), \quad \cos(k(x-ct)), \quad \sin(k(x+ct)), \quad \sin(k(x-ct)).$$

7. Løsningerne ovenfor kan fortolkes som bølger, der bevæger sig enten til højre eller til venstre, med hastigheden c, som derfor kaldes bølgernes udbredelseshastighed. Giv denne forklaring, for eksempel ved at starte i et punkt $(x, 0)$ og følge udbredelsen for $t > 0$. En anden måde er at tegne niveaukurver for en funktion $\cos(k(x - ct))$ i x-t-planen. Vælg selv værdier for k og c, for at lave tegninger.

8. Man kan få bølger med en vilkårlig bølgeform. Bølgeformen er beskrevet ved en funktion $F(x)$. Vis, at

$$u(x,t) = F(x - ct)$$

er en løsning til (2). Vis tilsvarende, at for en anden bølgeform $G(x)$ er

$$u(x,t) = G(x + ct)$$

også en løsning til (2).

Man kan vise, at den generelle løsning til (2) altid kan skrives på formen

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct), \tag{3}$$

altså en superposition af en bølge, der bevæger sig til højre, og en der bevæger sig til venstre.

9. Der findes også løsninger til bølgeligningen, der er stående bølger, dvs. bølgeformen skifter kun amplitude, og ikke position. Vi vil forsøge at finde stående bølger ved at gætte på en løsning af formen (k er en reel konstant)

$$u(x,t) = v(x)\sin(kct). \tag{4}$$

Indsæt i bølgeligningen (2), udled en anden ordens sædvanlig differentialligning for $v(x)$, find den generelle løsning til denne ligning, og forklar hvilke bølgetyper løsningerne (4) svarer til.

10. Som nævnt overnfor, så kan bevægelsen af en svingende streng beskrives ved hjælp af løsninger til bølgeligningen (2). Man kan specificere begyndelsestilstanden for en svingende streng ved at specificere position og hastighed i ethvert punkt. Vi ser på den situation, hvor vi starter med en position givet ved en funktion $f(x)$ og starter i hvile. Dvs. begyndelsesbetingelserne er

$$u(x,0) = f(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{6}$$

Brug den generelle løsning fra (3) til at vise, at så er løsningen givet ved

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-ct) + f(x+ct)\big).$$

Fortolk dette resultat, og skitser eventuelt løsningen for et valg af f.

Her er et eksempel på en sådan illustration. Begyndelsestilstanden er skitseret i Figur 2, og løsningen er skitseret for $-3 \leq x \leq 3$, $0 \leq t \leq 3$ i Figur 3. Der er valgt $c = 1$ her.

Åbne spørgsmål. Betragt det generelle begyndelsesværdiproblem for (2) givet ved begyndelsesbetingelserne

$$u(x,0) = f(x), \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{8}$$

Her angiver $f(x)$ begyndelsespositionen og $g(x)$ starthastigheden, for position x langs strengen. Vis, at den generelle løsning er givet ved

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-ct) + f(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Denne formel blev udledt af d'Alembert i 1747.

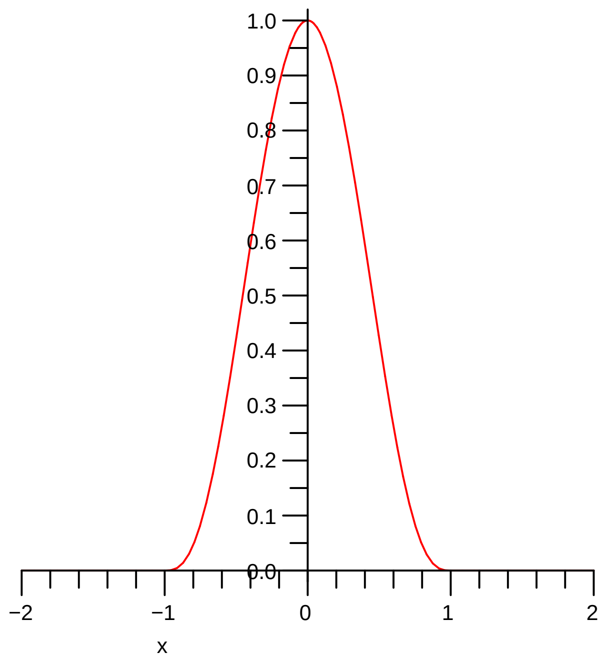
Teorispørgsmål.

Til denne opgave hører følgende emner fra teorien.

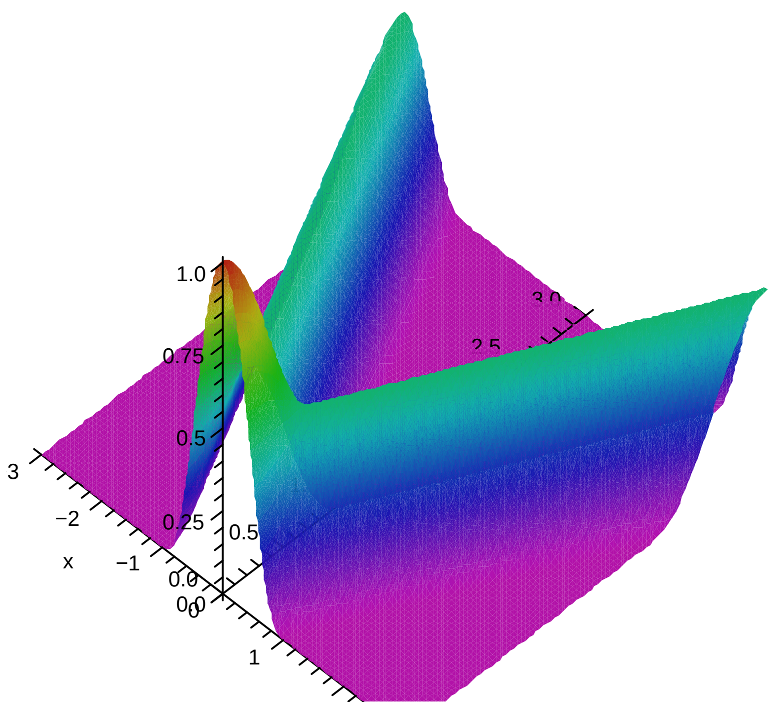
1. De komplekse tal, og nogle af deres egenskaber.

2. Polynomier og deres rødder. Faktorisering af polynomier.

3. Den komplekse eksponentialfunktion.
4. Andengradsligning og binom ligning.
5. Anden ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter.
6. Første ordens lineær differentialligning.
7. Gættemetoden til løsning af anden ordens inhomogen lineær differentialliging med konstante koefficienter.
8. Kædereglen for funktioner af flere variable.



Figur 2: Graf af begyndelsestilstand $f(x)$.



Figur 3: Graf af løsning $u(x,t)$.