Opgave 1. Betragt følgende system af ligninger:

$$\begin{cases} tx_1^2 + \sin^2(x_2) = 1, \\ \cos(x_2) + x_1 \sin(x_2) = t. \end{cases} \tag{1}$$

a). Vis, at $(x_1, x_2, t) = (1, 0, 1)$ er en løsning.

b). Vis, at der findes et åbent interval T_0, der indeholder 1, sådan at ligning (1) har en entydig løsning $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ defineret for $t \in T_0$, der opfylder betingelserne $(x_1(1), x_2(1)) = (1, 0)$ og komponenterne $x_{1,2}$ er C^1 funktioner på T_0.

c). Udregn $x_1'(1)$ og $x_2'(1)$.

Opgave 2. Find Fourier udvikling af følgende funktion:

$$f : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin^2(4x)\ .$$

Opgave 3. Følgen af funktioner $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, er defineret ved:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2, & \text{hvis} \quad x < 0 \\ 2 - 4nx, & \text{hvis} \quad 0 \leq x \leq 1/n \\ -2, & \text{hvis} \quad x > 1/n. \end{cases} \tag{2}$$

a). Udregn den punktvise grænseværdi af denne følge:

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Er f kontinuert?

b). Konvergerer følgen uniformt?

Opgave 4. Betragt kurven $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = -1 + e^{2\pi i t}$. Udregn integralet

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2 + 2z + 1} dz.$$

Fordeling af points for opgaveløsning:

Opgave 1a	2 point
Opgave 1b	4 point
Opgave 1c	4 point
Opgave 2	10 point
Opgave 3a	6 point
Opgave 3b	4 point
Opgave 4	10 point